

Math.p.²⁰
56
m

2 Math. p. 56 m

<36630094760014

<36630094760014

Bayer. Staatsbibliothek

2^o Mo. P. 56 m

ÜBER

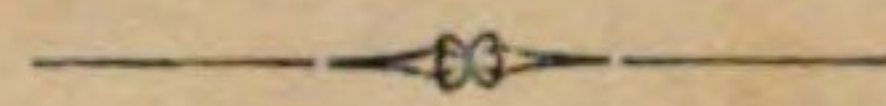
DIE RESULTANTE EINES SYSTEMES

MEHRERER

ALGEBRAISCHER GLEICHUNGEN.

EIN BEITRAG

ZUR THEORIE DER ELIMINATION.



VON

Dr. SCHLÄFLI.

(AUS DEM IV. BANDE DER DENKSCHRIFTEN DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE DER KAISERLICHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN BESONDERS ABGEDRUCKT.)



WIEN.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

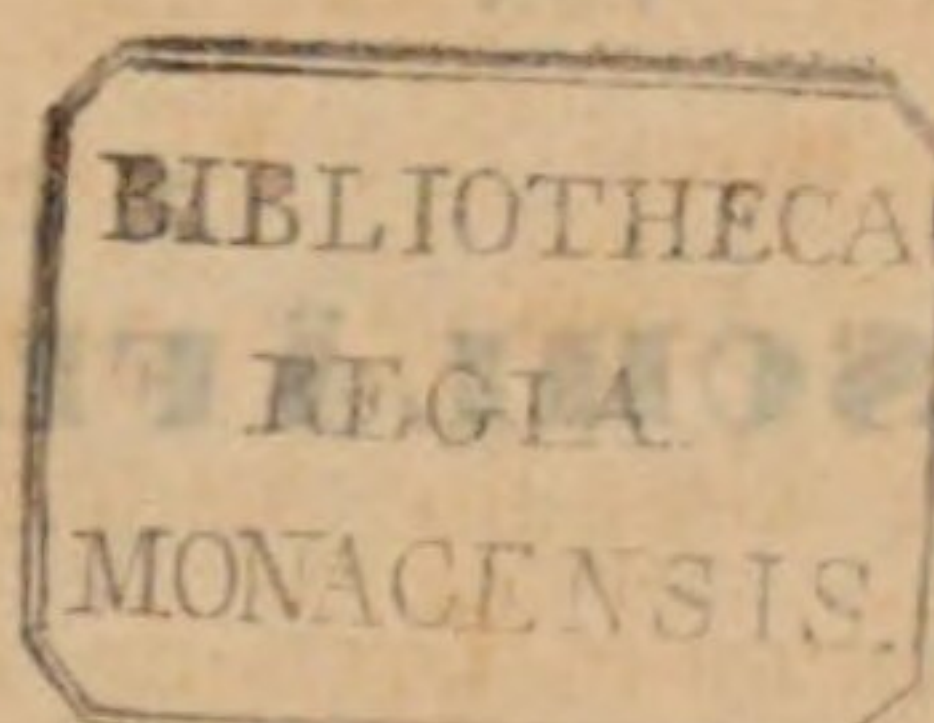
1852.

B

DIE RESULTATE EINES SYSTEMS
ALGEBRAISCHER GLEICHUNGEN.

EIN BEITRAG

ZUR THEORIE DER ELIMINATION.



WIEN

VON DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN BOH. UND STÄDTLICHEN UNIVERSITÄT

1873

Über die Resultante eines Systemes mehrerer algebraischen Gleichungen,

ein

Beitrag zur Theorie der Elimination.

Von Dr. **Schläfli**.

(Vorgelegt in der Sitzung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe am 9. Jänner 1851.)

Die Theorie der Elimination aus algebraischen Gleichungen scheint bis jetzt noch selten in ihrer ganzen Allgemeinheit behandelt worden zu sein. Nur für lineare Gleichungen hat man den allgemeinen Fall einer beliebigen Anzahl derselben untersucht; für höhere Gleichungen ist man fast immer bei der Zweizahl stehen geblieben, und es ist mir keine Schrift bekannt, worin der Satz über den Grad der Endgleichung eines Systemes ganz im Allgemeinen bewiesen wäre. Hesse hat zwar im 28sten Bande des Crelle'schen Journals interessante Betrachtungen über das Resultat der Elimination von zwei Unbekannten aus dreien quadratischen Gleichungen angestellt und daraus Folgerungen gezogen, welche für die Theorie der Curven dritten Grades von fundamentaler Bedeutung sind. Aber die Andeutungen über ein allgemeines Eliminationsverfahren, die er dort beiläufig gibt, sind nach meinem Urtheile nicht einmal theoretisch ausführbar. Dass in dieser Sache bis jetzt so wenig gethan worden ist, rührt vielleicht von ihrem geringen praktischen Interesse her. Denn sobald Anzahl und Grade der Gleichungen eines Systemes auch nur die Zweizahl überschreiten, so besteht die Endgleichung schon aus einer so unübersehbaren Menge von Gliedern, dass die numerische Behandlung ganz unpraktisch wird. Aber wie viele Zweige gibt es nicht in der Mathematik, in denen man, unbekümmert um numerische Anwendung, zufrieden ist mit der Einsicht in die blosse Möglichkeit einer Lösung oder eines Verfahrens? Durchgeht man Alles, was bis jetzt in Beziehung auf lineare Gleichungen gethan worden ist, von der Regel Bezout's oder Cramer's an bis auf die schönen Sätze, welche Jacobi im 22sten Bande des Crelle'schen Journals bewiesen hat, so gewähren diese Resultate einen überwiegend theoretischen Genuss, und man wird zu dem Verlangen fortgeführt, das Gebiet unserer Einsicht in die Natur eines Systemes von algebraischen Gleichungen überhaupt in ähnlicher Weise erweitert zu sehen. So wie bei linearen Gleichungen nicht sowohl die befriedigte Endgleichung für sich, als vielmehr, abgesehen von ihrer Erfüllung, nur die Form ihres Polynoms, gleichsam seine auf einen Schlag vor sich gehende Construction aus den Coefficienten der gegebenen linearen Gleichungen, uns vorzüglich anspricht, so möchten wir auch bei höheren Gleichungen die Form des Polynoms der Endgleichung (*le résultant*, wie es Cayley nennt), seine Zusammensetzung aus allen Coefficienten der ursprünglichen Gleichungen übersehen. Für zwei Gleichungen ist es schon seit langem bekannt, wie man die Aufgabe auf die Lösung eines Systemes linearer Gleichungen zurückführen kann, mit anderen Worten, man kennt die Resultante zweier algebraischen Gleichungen unter der Form einer Determinante, deren Grad gleich ist der Summe der Grade der beiden ursprünglichen Gleichungen. Man sehe unter anderem Hesse's Abhandlung hierüber im 27sten

Bande des Crelle'schen Journals. Für eine grössere Zahl von Gleichungen ist mir nur von Cayley ein grossartiger Versuch bekannt, solche Resultanten unmittelbar aus ihren Elementen zu construiren ¹⁾. Zu diesem Zwecke denkt sich Cayley mehrere Gruppen von gleich viel Variabeln und Polynome, welche in Beziehung auf alle Variabeln einer jeden solchen Gruppe homogen und linear sind. Dann construirt er aus den Coëfficienten solcher Polynome, die ich vielschichtig-lineare nennen möchte, gewisse Functionen, welche sich nach mehreren Seiten hin als ganze Functionen höheren Grades von lauter Determinanten der ursprünglichen Elemente darstellen lassen — er nennt sie Hyperdeterminanten — und dann weist er an einigen Beispielen nach, wie solche Hyperdeterminanten in Resultanten gewöhnlicher (ungeschichteter, symmetrischer nach Cayley's Ausdruck) Polynome höheren Grades übergehen, wenn man je die gleichnamigen Variabeln aller jener Gruppen oder Schichten einander gleich setzt. Wenn aber dort Cayley ferner es als sich von selbst verstehend anzunehmen scheint, dass die Resultante der abgeleiteten Gleichungen eines vielschichtig-linearen Polynoms von demselben Grade sei mit derjenigen des vollständigen gewöhnlichen Polynoms von derselben Dimension, und dass daher jene Resultante durch die dem symmetrischen Fall entsprechenden Annahmen in diese übergeführt werde, so ist dieses sicher ein Irrthum, wie im Verlauf dieser Abhandlung wird gezeigt werden.

Es ist mir nun zwar keineswegs gelungen, die Endgleichung irgend eines Systemes algebraischer Gleichungen auf independente Weise zu construiren, namentlich — worauf es hier allein ankömmt, denn die einzelnen Glieder selbst können schon a priori aus den ursprünglichen Elementen combinirt werden — den numerischen Coëfficienten jedes einzelnen Gliedes der Resultante für sich zu berechnen. Sondern das hier zu beschreibende Eliminationsverfahren ist auch successiv wie die gewöhnlichen, hat aber vor diesen das voraus, dass es auf keiner Stufe die Rechnung mit fremden Factoren trübt, sondern auf ganz sicherem Wege zu der reinen Endgleichung führt, welche gerade nur dem aufgegebenen Systeme entspricht. Es werden dann ferner mehrere allgemeine Sätze über die Resultante bewiesen, welche denen über die Determinante analog sind, die Jacobi im 22sten Bande des Crelle'schen Journals bekannt gemacht hat. Dann wird der schon von Cayley behandelte Fall eines vierschichtiglinearen Polynoms mit je zwei Variabeln noch einmal vorgenommen und die Resultante seiner acht abgeleiteten Gleichungen einer genauen Untersuchung unterworfen. Endlich behandle ich einen merkwürdigen Fall der Elimination, aus dem, wenn die Zahl der Variabeln auf drei oder vier beschränkt wird, ein sehr directes Verfahren folgt, die Schar aller Tangenten einer algebraischen Curve oder die Schar aller Berührungsebenen einer algebraischen Fläche durch eine Gleichung darzustellen, in welcher nur die drei oder vier Coëfficienten der linearen Gleichung einer Tangente oder einer Berührungsebene — die von Plücker im Gegensatze der gewöhnlichen oder Punkt-coordinaten so geheissenen Linien- oder Flächencoordinaten — als Variabeln auftreten.

Da der Gegenstand dieser Abhandlung mit der Theorie der Determinanten in nächster Beziehung steht, so möge am Ende derselben ein durch seine grosse Allgemeinheit merkwürdiger Satz über eine Determinante, deren Elemente aus m einfachen Elementen zur m^{ten} Classe combinirt sind, einen Platz finden.

§. 1. Erklärungen. Die Determinanten werde ich so bezeichnen, wie es Cayley thut. Das Zeichen

$$\begin{vmatrix} a & . & b & . & c & . & d \\ a' & . & b' & . & c' & . & d' \\ a'' & . & b'' & . & c'' & . & d'' \\ a''' & . & b''' & . & c''' & . & d''' \end{vmatrix}$$

z. B. stellt die aus den 16 hingeschriebenen Elementen gebildete Determinante Δ dar. Werden die in der vom linken Ende der obersten Horizontalzeile ausgehenden Diagonale liegenden Elemente zu dem Producte $ab'c''d'''$ vereinigt, so soll dieses Glied in der entwickelten Determinante immer das positive Vorzeichen haben. Um alle übrigen Glieder zu erhalten, hat man nur die Verticalzeilen des Schemas zu permutiren

¹⁾ Crelle XXX, S. 1.

und das Product der jedes Mal in die Diagonale fallenden Elemente mit dem positiven oder negativen Vorzeichen zu versehen, je nachdem die Permutation selbst eine positive oder negative ist. Das Aggregat aller so erhaltenen Producte ist die Determinante Δ . Jedes Mal, wenn nur zwei Verticalzeilen mit einander vertauscht werden, geht eine positive Permutation in eine negative über, und umgekehrt.

Werden in der entwickelten Determinante alle Glieder, welche irgend ein bestimmtes Element zum Factor haben, zu einer Gruppe vereinigt, und dann der gemeinschaftliche Factor weggelassen, so nenne ich das Ergebniss das *reciproke Element* zu jenem ursprünglichen. So ist z. B. $\frac{d\Delta}{db''}$ das reciproke Element zu b'' . Lässt man im Schema aller Elemente die in einem derselben sich kreuzenden Zeilen weg, so ist die Determinante der übrigen Elemente gleich oder entgegengesetzt dem reciproken Elemente des Kreuzungspunktes, je nachdem die Rangzahlen der weggelassenen Zeilen einen geraden oder ungeraden Unterschied haben.

In dem Schema

$$\left\| \begin{array}{cc|cc} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{array} \right\|$$

sollen immer zu beiden Seiten des mittelsten Striches gleichviel Verticalzeilen sein. Multiplicirt man nun alle Elemente irgend einer Verticalzeile der linken Hälfte mit den entsprechenden Elementen irgend einer Verticalzeile der rechten Hälfte und addirt alle Producte, so ordnen sich die Productensummen auf natürliche Weise in der Form eines Quadrates, dessen Seite so viele Glieder zählt, als jede Hälfte des obigen Schemas Verticalzeilen. Die Determinante der so geordneten Productensummen soll künftig durch obiges Schema dargestellt werden. Es ist also z. B.

$$\left| \begin{array}{l} ac + a'c' + a''c'' \cdot ad + a'd' + a''d'' \\ bc + b'c' + b''c'' \cdot bd + b'd' + b''d'' \end{array} \right| = \left\| \begin{array}{cc|cc} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{array} \right\|$$

und nach einem bekannten Satze

$$= \left| \begin{array}{cc} a & b \\ a' & b' \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} c & d \\ c' & d' \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} a & b \\ a'' & b'' \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} c & d \\ c'' & d'' \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} a' & b' \\ a'' & b'' \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} c' & d' \\ c'' & d'' \end{array} \right|.$$

Da wir meist nur homogene Functionen der Variablen betrachten werden, so soll in der Regel das einfache Wort „Polynom“ ein homogenes Polynom bezeichnen.

Da das in verschiedenen Beziehungen kurz hinter einander gebrauchte Wort „Coefficient“ leicht sinnstörende Verwechslungen verursachen könnte, so sollen die Coefficienten der verschiedenen Glieder eines Polynoms kurzweg die Elemente desselben heissen.

Den gewöhnlichen Ausdruck „Potenzen und Producte der Variablen“ werden wir durch den kürzeren „Variablen-Combinationen“ ersetzen. Es sind dann natürlich Combinationen mit Wiederholungen gemeint.

Im Allgemeinen denken wir uns jedes Glied eines Polynoms immer als Product eines Elementes mit der entsprechenden Variablen-Combination. Die Permutationszahl dieser Combination soll nicht als numerischer Factor hinzugedacht werden, wenn dies nicht ausdrücklich bemerkt wird.

Die Exponenten, welche die einzelnen Variablen in irgend einer Combination haben, heissen die Zeiger des entsprechenden Elementes. Zeiger verschiedener Elemente, welche sich auf eine und dieselbe Variable beziehen, sollen gleichnamige Zeiger heissen.

Liegt ein System mehrerer Gleichungen vor, so können wir diese ihrem Range nach unterscheiden. Elemente irgend eines Ranges werden daher solche sein, die in irgend einer und derselben Gleichung vorkommen. Die Elemente aller Gleichungen zusammen sollen Elemente des Systemes heissen.

Besteht ein System aus eben so vielen homogenen Gleichungen als Variabeln sind, so kann man die Verhältnisse dieser Variabeln sich eliminirt denken; die ganze und rationale Endgleichung wird eine Relation zwischen allen Elementen des Systemes ausdrücken. Wenn nun immer beim Statthaben dieser Relation auch die Verhältnisse der Variabeln so bestimmt werden können, dass alle ursprünglichen Gleichungen des Systemes erfüllt sind, und wenn umgekehrt alle diese Gleichungen nicht anders befriedigt werden können, als indem zugleich jene Endgleichung befriedigt wird, so soll das Polynom derselben die *Resultante* des Systemes heissen und als ganze rationale Function seiner wieder frei gedachten Elemente aufgefasst werden.

Es braucht wohl kaum bemerkt zu werden, dass nie das Verschwinden sämmtlicher Variabeln als Lösung eines Systemes homogener Gleichungen gelten darf.

Kann die Endgleichung verschwinden, ohne dass es zugleich Verhältnisse der Variabeln gibt, welche das ganze System befriedigen, so hat ihr Polynom einen fremden Factor. Kann umgekehrt das ganze System befriedigt werden, ohne dass dies auch mit der Endgleichung geschieht, so fehlt in ihrem Polynom ein in der Resultante vorkommender Factor.

Die gegebene Definition wird ungenügend, wenn entweder das Polynom der Endgleichung oder die wahre Resultante potenzierte Factoren haben. So viel ist indess sicher, dass wenn beim Verschwinden irgend einer untheilbaren ganzen Function der Elemente das ganze System durch verschiedene Reihen von Verhältnissen der Variabeln befriedigt wird, die Resultante jene ganze Function wenigstens eben so oft als Factor enthalten muss.

Die genannten Schwierigkeiten fallen weg, wenn alle Gleichungen des Systemes vollständig sind, d. h., wenn in jeder alle ihrem Grade entsprechenden Combinationen sämmtlicher Variabeln vorkommen, und wenn alle Elemente als lauter einfache und unter sich unabhängige Grössen gelten. In diesem Falle nehmen wir die *Untheilbarkeit der Resultante* als Grundsatz an.

Wenn die Zahl der Variabeln diejenige der homogenen Gleichungen eines Systemes um 1 übertrifft, so bleiben die Elemente frei, und nur die Verhältnisse der Variabeln werden bestimmt. Jede so bestimmte Reihe gleichzeitiger Werthe aller Variabeln — es kommt begreiflich nur auf ihre Verhältnisse an — nennen wir eine *Wurzelgruppe* des Systemes; die einzelnen Werthe selbst, aus denen die Reihe oder Gruppe besteht, heissen *Wurzeln*. Wir wollen die verschiedenen Lösungen des Systemes durch *Accente* unterscheiden. Wurzeln sind daher *gleichaccentig*, wenn sie zu einer und derselben Wurzelgruppe gehören, *gleichnamig*, wenn sie in verschiedenen Lösungen Werthe einer und derselben Variabeln sind.

Wird eine Function der Wurzeln eines Systemes durch Permutation der Wurzelgruppen (der Accente) nicht geändert, so heisst sie eine *symmetrische Function*. (Wir werden nur ganze Functionen dieser Art betrachten.) Gehen aus einem einzigen Gliede derselben durch blosser Permutation der Accente alle übrigen hervor, so heisst sie *einfach*.

Da nur die Verhältnisse aller gleichaccentigen Wurzeln bestimmt sind, so muss jedes Glied einer symmetrischen Function in Beziehung auf jeden Accent von derselben Dimension sein, d. h. es muss aus jeder Gruppe gleich viel Wurzeln zu Factoren haben. Ist nun die Dimension in Beziehung auf jeden Accent der Einheit gleich, so heisst die symmetrische Function *primitiv*.

Wenn sämmtliche Lösungen des Systemes für eine bestimmte Variable keinen einzigen verschwindenden Werth geben, so dürfen wir die entsprechenden Wurzeln alle gleich 1 setzen. Dann werden in irgend einem Gliede einer einfachen symmetrischen Function nicht mehr alle Accente vorkommen. Nach der Anzahl der in einem Gliede vorhandenen Accente nennen wir dann die Function *ein-, zwei-, dreiaccentig* u. s. f. In einer Gleichung mit einer Unbekannten z. B. sind die Summen der Potenzen der Wurzeln *einaccentig*, die Summen der Combinationen ohne Wiederholung *primitive Functionen*.

Setzen wir eine beliebige Reihe von Variabeln-Combinationen desselben Grades hin, welche nicht sämmtlich durch eine und dieselbe Variable dividirt werden können, und multipliciren nun diese Grundreihe

nach und nach mit einzelnen Variabeln-Combinationen, welche durchaus nicht vom selben Grade zu sein brauchen, so mögen die neuen so gebildeten Reihen äquidistante Variabeln-Combinationen heissen.

§. 2. Wenn n höhere algebraische Gleichungen mit n Unbekannten gegeben sind, und man wollte eine dieser Unbekannten aus je zwei Gleichungen eliminiren, indem man z. B. die erste mit allen übrigen combinirte, um so $n - 1$ Gleichungen mit $n - 1$ Unbekannten zu erhalten, so würde im Allgemeinen der Grad jeder Gleichung des neuen Systemes gleich sein dem Producte der Grade der beiden ursprünglichen Gleichungen, aus deren Combination jene Gleichung hervorgegangen ist. Denkt man sich ein solches Verfahren wiederholt, so sieht man, dass die Grade der Gleichungen etwa wie Potenzen steigen, deren Exponenten in der geometrischen Reihe 1, 2, 4, 8, . . . fortgehen. Abgesehen davon, dass für eine auch nur mässige Anzahl quadratischer Gleichungen die Ausführung eines solchen Eliminationsverfahrens mehr Zeit als die eines Menschenlebens erforderte, ist dabei nicht einmal theoretischer Gewinn, weil man die Zahl sämmtlicher Lösungen des Systemes ungeheuer überschätzen würde. Wenn nun auch das sogleich zu zeigende Verfahren immer noch sehr bald unausführbar wird wegen der abschreckenden Länge seiner Entwicklungen, so führt uns doch die Vorstellung von seiner Möglichkeit zu der deutlichen Erkenntniss von der Zahl der Lösungen, die das System wirklich hat.

Das Verfahren ist ein successives und demjenigen analog, durch welches bei zwei algebraischen Gleichungen die Elimination mit Hülfe der Theorie der symmetrischen Functionen geschieht. Die Hauptsache, auf die es dabei ankömmt, wird in der Lösung der folgenden Aufgabe deutlich werden.

Es seien $x, y, z, \dots w$ die $n + 1$ Variabeln des gegebenen Systemes von n homogenen Gleichungen. Man setze nun eine lineare Gleichung mit litteralen Coëfficienten, wie

$$ax + by + cz + \dots + kw = 0,$$

hinzu. Die Resultante des so vermehrten Systemes sei bekannt. Man soll jede einfache symmetrische Function der Wurzelgruppen des ursprünglichen Systemes rational durch seine Elemente ausdrücken.

Man ordne die Resultante nach den fallenden Potenzen eines der Elemente jener beigefügten linearen Gleichung, z. B. nach denen von k , und es sei — was der allgemeine Fall ist — eine Potenz von k vorhanden, deren Exponent dem Grade gleich ist, den die Resultante in Beziehung auf alle Elemente $a, b, c, \dots k$ überhaupt hat; ihr Coëfficient heisse K . Dann sind alle folgenden Coëfficienten der Potenzen von k resp. die mit K multiplicirten Summen der Combinationen (ohne w .) erster, zweiter, dritter, . . . Classe der Werthe von

$$\frac{ax + by + cz + \dots}{w},$$

welche das ursprüngliche System liefert. Aus diesen können alle Potenzensummen

$$\sum \left(\frac{ax + by + cz + \dots}{w} \right)^r$$

jener Werthe berechnet werden. Mit der entsprechenden Potenz von K multiplicirt, werden sie als ganze Functionen der Elemente des Systemes erscheinen. Man entwickle diese nach den Combinationen der Hülfelemente $a, b, c, \dots$, so wird man durch Vergleichung der Multiplicatoren irgend einer Combination wie $a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots$ den Werth einer einaccentigen symmetrischen Function, wie

$$\sum \frac{x^\alpha y^\beta z^\gamma \dots}{w^{\alpha+\beta+\gamma+\dots}},$$

erhalten. Aus diesen einaccentigen Functionen können aber alle vielaccentigen, wie

$$\sum \frac{x^\alpha y^\beta z^\gamma \dots}{w^{\alpha+\beta+\gamma+\dots}} \cdot \frac{x'^{\alpha'} y'^{\beta'} z'^{\gamma'} \dots}{w'^{\alpha'+\beta'+\gamma'+\dots}} \cdot \frac{x''^{\alpha''} y''^{\beta''} z''^{\gamma''} \dots}{w''^{\alpha''+\beta''+\gamma''+\dots}} \dots,$$

nach demselben Gesetz berechnet werden, welches Woring¹⁾ für Gleichungen mit einer Unbekannten gezeigt hat.

Setzen wir nämlich

$$(\alpha, \beta, \gamma, \dots; \alpha', \beta', \gamma', \dots; \alpha'', \beta'', \gamma'', \dots; \dots) = \sum \frac{x^\alpha y^\beta z^\gamma \dots}{w^{\alpha+\beta+\gamma+\dots}} \cdot \frac{x'^{\alpha'} y'^{\beta'} z'^{\gamma'} \dots}{w'^{\alpha'+\beta'+\gamma'+\dots}} \dots, \quad 2)$$

so finden wir durch Multiplication

$$(\alpha, \beta, \gamma, \dots) (\alpha', \beta', \gamma', \dots) = (\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma', \dots) + (\alpha, \beta, \gamma, \dots; \alpha', \beta', \gamma', \dots);$$

also ist jede zweiaccentige Function

$$(\alpha, \beta, \gamma, \dots; \alpha', \beta', \gamma', \dots) = (\alpha, \beta, \gamma, \dots) (\alpha', \beta', \gamma', \dots) - (\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma', \dots).$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta, \gamma, \dots; \alpha', \beta', \gamma', \dots) (\alpha'', \beta'', \gamma'', \dots) &= (\alpha + \alpha'', \beta + \beta'', \dots; \alpha', \beta', \dots) \\ &+ (\alpha, \beta, \dots; \alpha' + \alpha'', \beta' + \beta'', \dots) + (\alpha, \beta, \dots; \alpha', \beta', \dots; \alpha'', \beta'', \dots), \end{aligned}$$

und wenn man die vorige Formel wieder anwendet, jede dreiaccentige Function

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta, \dots; \alpha', \beta', \dots; \alpha'', \beta'', \dots) &= (\alpha, \beta, \dots) (\alpha', \beta', \dots) (\alpha'', \beta'', \dots) \\ &- (\alpha + \alpha', \beta + \beta', \dots) (\alpha'', \beta'', \dots) - (\alpha + \alpha'', \beta + \beta'', \dots) (\alpha', \beta', \dots) - (\alpha, \beta, \dots) (\alpha' + \alpha'', \beta' + \beta'', \dots) \\ &+ 2 (\alpha + \alpha' + \alpha'', \beta + \beta' + \beta'', \dots). \end{aligned}$$

Wie dies weiter geht, ist klar. Man wird also im Stande sein, jede vielaccentige Function durch lauter einaccentige auszudrücken. Selbst das Bildungsgesetz eines solchen Ausdruckes ist leicht anzugeben. Wenn die Function r accentig ist, so theile man die Zahl r auf alle möglichen Arten in positive Theile, wobei blosse Versetzungen der Theile ausgeschlossen sein sollen. Eine solche Zerlegung sei z. B.

$$r = f + g + \dots + k.$$

Es seien ferner $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \dots; \dots; \alpha_r, \beta_r, \gamma_r, \dots$ die Exponentengruppen, welche die aufgegebene Function charakterisiren. Man theile die Reihenfolge dieser Gruppen auf alle möglichen Arten in einzelne Complexe, welche resp. $f, g, \dots, k$ Gruppen umfassen, doch so, dass innerhalb jedes Complexes keine Versetzungen seiner Elementargruppen gestattet sind, und dass auch, wenn einige der Zahlen $f, g, \dots, k$ einander gleich sind, keine Anordnungen sich durch blosse Vertauschung der diesen gleichen Zahlen entsprechenden Complexe unterscheiden dürfen. Dann möge jedem Complex eine einaccentige Function entsprechen, deren charakteristische Exponenten die Summen der gleichnamigen Exponenten sind, welche in den Elementargruppen dieses Complexes enthalten sind; und jeder Anordnung das Product aller einaccentigen Functionen, welche den in ihr begriffenen Complexen entsprechen. Der gemeinschaftliche Factor sämmtlicher auf diese Weise bestimmten Producte ist

$$(-1)^{f-1} 1.2.3 \dots (f-1) \times (-1)^{g-1} 1.2.3 \dots (g-1) \times \dots \times (-1)^{k-1} 1.2.3 \dots (k-1).$$

Wird dieses Verfahren auf alle Zerfällungen der Zahl r in positive Theile ausgedehnt, so ist das Aggregat aller Resultate der Werth der aufgegebenen r accentigen Function.

Es ist leicht, dieses Bildungsgesetz durch den Schluss von r auf $r+1$ zu beweisen.

Wir können also alle vielaccentigen Functionen auf einaccentige zurückführen. Da wir aber auch im Stande sind, diese durch lauter primitive auszudrücken, so werden wir zuletzt jede vielaccentige Function als ein Aggregat von Producten primitiver Functionen darstellen können. Indess wird in den Formen dieser

¹⁾ Siehe Klügel's math. Wörterbuch Art. Symm. Function, S. 870.

²⁾ Um die allgemeine Gültigkeit der folgenden Formeln nicht zu beschränken, sollen coincidirende Exponentenreihen gleich wie verschiedene behandelt werden. Dann ist z. B. $(\alpha, \beta, \gamma, \dots; \alpha, \beta, \gamma, \dots) = 2 \sum \frac{x^\alpha y^\beta z^\gamma \dots}{w^{\alpha+\beta+\gamma+\dots}} \cdot \frac{x'^\alpha y'^\beta z'^\gamma \dots}{w'^{\alpha'+\beta'+\gamma'+\dots}}$, wenn diese Summe lauter verschiedene Glieder enthält.

Darstellungen für eine und dieselbe gegebene symmetrische Function Mannigfaltigkeit stattfinden, da die primitiven Functionen nicht unter sich unabhängig, sondern durch viele identische Relationen verbunden sind. Wenn z. B. nur zwei Wurzelgruppen sind, so ist folgendes eine solche Relation:

$$(xy' + x'y)(xz' + x'z)(yz' + y'z) - xx'(yz' + y'z)^2 - yy'(xz' + x'z)^2 - zz'(xy' + x'y)^2 + 4xx'yy'zz' = 0.$$

Es ist von Wichtigkeit, die niedrigste Potenz von K zu kennen, mit der man den auf die beschriebene Weise erhaltenen Ausdruck für die symmetrische Function

$$\sum \frac{x^\alpha y^\beta z^\gamma \dots}{w^{\alpha+\beta+\gamma+\dots}} \times \frac{x'^{\alpha'} y'^{\beta'} z'^{\gamma'} \dots}{w'^{\alpha'+\beta'+\gamma'+\dots}} \times \dots \times \dots$$

multipliciren muss, um ihn ganz zu machen. Man vergleiche alle Summen von zur selben Gruppe gehörenden Exponenten $\alpha + \beta + \gamma + \dots$, $\alpha' + \beta' + \gamma' + \dots$, $\alpha'' + \beta'' + \gamma'' + \dots$, etc., so wird gewiss eine darunter von keiner der übrigen übertroffen werden. Es sei dies z. B. die erste $\alpha + \beta + \gamma + \dots = \sigma$, so ist K^σ der Multiplikator, der diese symmetrische Function ganz macht.

Um dies zu beweisen, multiplicire man die symmetrische Function mit $(ww'w''w'''\dots)^\sigma$, wo das eingeklammerte Product sich auf alle Wurzelgruppen erstreckt. Ist dann $\alpha' + \beta' + \gamma' + \dots + \alpha'' + \beta'' + \dots + \alpha''' + \beta''' + \dots = \sigma$, so erhält man die symmetrische Function

$$\sum x^\alpha y^\beta z^\gamma \dots w^\sigma \times x'^{\alpha'} y'^{\beta'} z'^{\gamma'} \dots w'^{\sigma'} \times x''^{\alpha''} y''^{\beta''} z''^{\gamma''} \dots w''^{\sigma''} \times \dots,$$

wo in jedem Gliede alle Accente zugleich vorkommen. Bezeichnen wir nun den Grad der Resultante in Beziehung auf $a, b, c, \dots k$, oder, was dasselbe ist, die Zahl der Wurzelgruppen mit p und die Coefficienten von a^p, k^p mit A, K , so ist $xx'x'' \dots : ww'w'' \dots = A : K$. Würde nun die betrachtete symmetrische Function erst durch Multiplication mit $K^{\sigma+\varepsilon}$ ganz gemacht, so hätte der Ausdruck für

$$\sum \left(\frac{y}{x}\right)^\beta \left(\frac{z}{x}\right)^\gamma \dots \left(\frac{w}{x}\right)^\sigma \times \left(\frac{y'}{x'}\right)^{\beta'} \left(\frac{z'}{x'}\right)^{\gamma'} \dots \left(\frac{w'}{x'}\right)^{\sigma'} \times \dots$$

den Nenner $A^\sigma K^\varepsilon$. Wenn man aber die Resultante nach den fallenden Potenzen von a ordnet und das gleiche Verfahren wie vorhin befolgt, so wird man zu einem Ausdruck gelangen, der nur eine Potenz von A zum Nenner haben kann. Folglich muss $\varepsilon = 0$ sein.

Wird jetzt die lineare Gleichung $ax + by + \dots + kw = 0$ durch irgend eine höhere Gleichung vom Grade m , z. B. $\varphi(x, y, z, \dots w) = 0$ ersetzt, so hat man für die Resultante des so veränderten Systemes den Ausdruck

$$K^m \frac{\varphi(x, y, \dots w)}{w^m} \cdot \frac{\varphi(x', y', \dots w')}{w'^m} \cdot \frac{\varphi(x'', y'', \dots w'')}{w''^m} \dots,$$

wo das Product sich auf alle p Wurzelgruppen $x : y : z : \dots w, x' : y' : z' : \dots w', x'' : y'' : z'' : \dots w'',$ etc. erstreckt.

§. 3. Aus dem Bisherigen fließt nun folgendes Eliminationsverfahren.

Es seien n Gleichungen zwischen den $n+1$ Variablen $x, y, z, \dots w$ und resp. von den Graden $m_1, m_2, m_3, \dots m_n$ gegeben:

$$\varphi_1(x, y, \dots w) = 0, \varphi_2 = 0, \varphi_3 = 0, \dots \varphi_n = 0.$$

Man setze n lineare Gleichungen hin

$$\rho = ax + by + cz \dots + kw = 0, \rho_1 = a_1x + \dots + k_1w = 0, \rho_2 = 0, \dots \rho_{n-1} = 0,$$

und vereinige sie mit $\varphi_n = 0$ zu einem Systeme. Die Resultante desselben wird man erhalten, wenn man die Werthe von $x : y : \dots w$, welche die n linearen Gleichungen geben, in φ_n substituirt. Sie wird in Beziehung auf jede Elementenreihe $(a, b, c, \dots k)$ vom m_n^{ten} und in Beziehung auf die Elemente von φ_n

vom ersten Grade sein. Man ordne sie nach den Combinationen von $a_{n-1}, b_{n-1}, \dots, k_{n-1}$, so hat man die primitiven Functionen der m_n Wurzelgruppen des Systemes

$$\rho = 0, \rho_1 = 0, \dots, \rho_{n-2} = 0, \varphi_n = 0$$

vor Augen und ist mittelst derselben in Stand gesetzt, die Resultante des Systemes

$$\rho = 0, \rho_1 = 0, \dots, \rho_{n-2} = 0, \varphi_{n-1} = 0, \varphi_n = 0$$

zu berechnen. Diese ist in Beziehung auf die Elemente von φ_{n-1} vom Grade m_n und in Beziehung auf die Elemente der übrigen Polynome von einem m_{n-1} Mal höheren Grade als die vorige Resultante, also in Beziehung auf die Elemente eines jeden der linearen Polynome $\rho, \rho_1, \dots, \rho_{n-2}$ vom Grade $m_{n-1} m_n$ und in Beziehung auf die Elemente von φ_n vom Grade m_{n-1} . Man ordne nun diese Resultante nach den Combinationen von $a_{n-2}, b_{n-2}, \dots, k_{n-2}$, um die Verhältnisse der primitiven Functionen der Wurzelgruppen des Systemes

$$\rho = 0, \rho_1 = 0, \rho_2 = 0, \dots, \rho_{n-3} = 0, \varphi_{n-1} = 0, \varphi_n = 0$$

vor Augen zu haben, und berechne mittelst derselben die zusammengesetzte symmetrische Function $\Pi \varphi_{n-2}(x, y, \dots, w)$, wo das Product sich auf alle $m_{n-1} m_n$ Wurzelgruppen erstreckt. Das Resultat, die Resultante des Systemes

$$\rho = 0, \rho_1 = 0, \rho_2 = 0, \dots, \rho_{n-3} = 0, \varphi_{n-2} = 0, \varphi_{n-1} = 0, \varphi_n = 0,$$

wird in Beziehung auf die Elemente von φ_{n-2} vom Grade $m_{n-1} m_n$ und in Beziehung auf die primitiven Functionen vom Grade m_{n-2} sein, also in Beziehung auf die Elemente eines jeden der linearen Polynome ρ vom Grade $m_{n-2} m_{n-1} m_n$, in Beziehung auf die Elemente von φ_{n-1} vom Grade $m_{n-2} m_n$ und in Beziehung auf die Elemente von φ_n vom Grade $m_{n-2} m_{n-1}$. Wenn man weiter so verfährt, so gelangt man zuletzt zur Resultante u des Systemes

$$\rho = 0, \varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \dots, \varphi_n = 0,$$

welche in Beziehung auf die Elemente $a, b, c, \dots, k$ des linearen Polynoms ρ und auf diejenigen der übrigen Polynome $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ resp. von den Graden $p = m_1 m_2 m_3 \dots m_n, \frac{p}{m_1}, \frac{p}{m_2}, \dots, \frac{p}{m_n}$ sein wird.

Sind endlich die Elemente der Polynome $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ numerisch gegeben, so muss die Resultante u in Beziehung auf die einzig noch übrig gebliebenen litteralen Elemente $a, b, c, \dots, k$ in p lineare Factoren zerlegt werden können. Diese Aufgabe kömmt, wie leicht zu begreifen, auf die Auflösung einer Gleichung p^{ten} Grades mit einer Unbekannten zurück. Ist die Zerfällung ausgeführt, so ist die Reihe der numerischen Coëfficienten von $a, b, c, \dots, k$ in irgend einem linearen Factor von u zugleich eine Wurzelgruppe des Systemes der Gleichungen $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \dots, \varphi_n = 0$.

Das Verfahren würde demnach etwa folgendes sein. Man stelle die Differentialcoëfficienten $\frac{du}{da}, \frac{du}{db}, \dots, \frac{du}{dk}$ dar, ordne die Gleichung $u=0$ nach den fallenden Potenzen eines der Coëfficienten $a, b, \dots, k$, z. B. nach denen von a und gebe den Verhältnissen $b:c:\dots:k$ beliebige Werthe; man kann z. B. $c=d=\dots=k=0$ setzen. Man wird dann eine Gleichung p^{ten} Grades für das noch unbekannte Verhältniss $a:b$ erhalten. Die p für dasselbe gefundenen Werthe werden zugleich mit den für $b:c:d:\dots:k$ angenommenen Werthe in jene $n+1$ Differentialcoëfficienten substituirt, so hat man die p Wurzelgruppen $x:y:z:\dots:w$ des Systemes $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \dots, \varphi_n = 0$ gefunden.

(Anmerkung. Wenn ein homogenes Polynom m^{ten} Grades $\varphi(x, y, \dots, w)$ in m lineare Factoren zerlegt werden kann, so findet man dieselben auf folgende Weise. Es sei $x_1:y_1:\dots:w_1$ irgend eine Lösung der Gleichung $\varphi = 0$, und man substituirt diese Werthe der Variabeln in die Differentialcoëfficienten $\frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}, \dots, \frac{d\varphi}{dw}$, so werden die letzteren zu Coëfficienten eines linearen Polynoms ρ_1 , welches in φ aufgeht. Verfährt man ebenso mit anderen Lösungen $x_2:y_2:\dots:w_2, x_3:y_3:\dots:w_3$, etc., so kann man auch andere Polynome $\rho_2, \rho_3, \dots$ erhalten. Erhielte man aber auf diesem Wege mehr als m verschiedene lineare

Polynome, so müsste man daraus schliessen, dass φ nicht in lauter lineare Factoren zerlegt werden kann. Um sicher zu gehen, kann man die Verhältnisse $y : z : \dots : w$ für alle Lösungen behalten, so wird die nach x aufgelöste Gleichung, $\varphi = 0$, m Lösungen geben, die sich nur durch die Werthe von x unterscheiden und daher nothwendig verschiedene Polynome ρ liefern müssen. Es braucht kaum bemerkt zu werden, dass im Vorigen vorausgesetzt wurde, dass keine zwei linearen Factoren von φ einander gleich sind, und dass keine Lösung mehr als einen dieser Factoren verschwinden macht.)

Unbequem ist es bei dem beschriebenen Verfahren, dass man die von der Rechnung geforderten vielaccentigen Functionen erst in Functionen der einaccentigen und dann diese in Functionen der primitiven Functionen ausdrücken muss. Dieser Umweg bewirkt, dass man weit höher potenzirte Nenner in die Rechnung bekommt, als der Typus der aufgegebenen symmetrischen Functionen erfordert, und dass man dann die weitschichtigen Polynome so lange mit unsäglich Mühe reduciren muss, bis die Nenner auf das gehörige Mass herunter gebracht sind. Es wäre wichtig zu wissen, ob, wenn die primitiven Functionen durch einfache Zeichen bezeichnet sind, die besprochene Reduction ausgeführt werden kann, ohne dass man die mannigfaltigen Relationen, welche jene primitiven Functionen verknüpfen, zu Hülfe nimmt. Freilich, wenn für die primitiven symmetrischen Functionen ihre entwickelten Ausdrücke gesetzt werden, so werden diese in identischer Weise allen jenen Relationen genügen, und die angeregte Schwierigkeit fällt gänzlich weg. Um den Umweg unseres Verfahrens zu vermeiden, sollte man die geforderten vielaccentigen Functionen unmittelbar in Functionen der primitiven darstellen können, wie es für die Wurzeln einer einzigen algebraischen Gleichung Gauss gezeigt hat in seiner Abhandlung: *Demonstratio nova altera theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse.* (Comment. d. Gött. Ak. 1816.)

§. 4. Hesse hat in seiner schönen Abhandlung über die Resultante von drei quadratischen Gleichungen (Crelle XXVIII, S. 71) auch im Vorbeigehen über das Eliminationsverfahren im Allgemeinen sich ausgesprochen. Dasselbe würde in Folgendem bestehen.

Angenommen, die Resultante u des Systemes $\rho = ax + by \dots + kw = 0, \varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \dots \varphi_n = 0$ sei bekannt und in Beziehung auf $a, b, \dots k$ homogen und vom p^{ten} Grade, so soll man mittelst derselben die Resultante U eines neuen Systemes finden, worin nur jene erste lineare Gleichung $\rho = 0$ durch eine $\varphi = 0$ vom m^{ten} Grade ersetzt ist. Wir wollen die p verschiedenen Wurzelgruppen des Systemes der n Gleichungen $\varphi_1 = 0, \dots \varphi_n = 0$ und die ihnen entsprechenden Werthe von ρ durch übergesetzte Zeiger 1, 2, 3, $\dots p$ unterscheiden. Dann ist $u = \rho^1 \rho^2 \rho^3 \dots \rho^p$, wo z. B. $\rho^1 = ax + by + \dots + kw$. Nach Hesse haben wir uns nun m verschiedene Gruppen der Coefficienten $a, b, c, \dots k$ zu denken, die wir sammt den entsprechenden Ausdrücken für ρ und u durch die untergesetzten Zeiger 1, 2, 3, $\dots m$ unterscheiden wollen, so dass z. B. $\rho_1 = a_1 x + b_1 y \dots + k_1 w$ und $u_1 = \rho_1^1 \rho_1^2 \rho_1^3 \dots \rho_1^p$ wird. Dann sollten wir beide Seiten der Gleichung

$$u_1 u_2 u_3 \dots u_m = \rho_1^1 \rho_1^2 \dots \rho_1^p \times \rho_2^1 \rho_2^2 \dots \rho_2^p \times \dots \times \rho_m^1 \rho_m^2 \dots \rho_m^p$$

nach den Combinationen der $m(n+1)$ Grössen $a_1, b_1, \dots k_1, \dots a_m, b_m, \dots k_m$ entwickeln und die Multiplicatoren derselben Combinationen auf beiden Seiten einander gleich setzen, so würden wir die Werthe aller der symmetrischen Functionen erhalten, deren Kenntniss uns zur Berechnung der Formel

$$U = \prod \varphi(x, y, z, \dots w) = \varphi^1 \varphi^2 \dots \varphi^p,$$

wo das Product sich über alle p Wurzelgruppen erstreckt, nöthig wäre.

Wir wollen die Ausführbarkeit dieser Vorschrift näher untersuchen. Das Product $\rho_1^1 \rho_1^2 \dots \rho_1^p$ liefert uns primitive Combinationen der Grössen $a_1, b_1, \dots k_m$, wo jede der m Gruppen immer nur durch eine einzige Grösse repräsentirt ist. Isoliren wir eine dieser primitiven Combinationen und nennen sie A . Dieselbe wird mit einer Combination P der Wurzeln $x, y, \dots w$ der ersten Gruppe multiplicirt sein,

welche nur von den Namen $a, b, \dots, k$ der Factoren von A , aber nicht von ihren untergesetzten Zeigern abhängt. Ebenso seien $B \overset{2}{Q}, \dots, C \overset{p}{R}$ einzelne Glieder der entwickelten Specialproducte $\overset{2}{\rho}_1 \overset{2}{\rho}_2 \dots \overset{2}{\rho}_m, \dots, \overset{p}{\rho}_1 \overset{p}{\rho}_2 \dots \overset{p}{\rho}_m$. Dann wird $AB \dots C \times \overset{1}{P} \overset{2}{Q} \dots \overset{p}{R}$ ein Glied des totalen Productes aller $m(n+1)$ Formen von ρ sein. Vertauschen wir nun in der Combination $\overset{1}{P} \overset{2}{Q} \dots \overset{p}{R}$ die oberen auf die p Wurzelgruppen bezüglichen Zeiger, so erhalten wir

$$AB \dots C \times \Sigma \overset{1}{P} \overset{2}{Q} \dots \overset{p}{R}$$

als Glied des totalen Productes aller Formen von ρ , und die symmetrische Function $\Sigma \overset{1}{P} \overset{2}{Q} \dots \overset{p}{R}$ ist es gerade, deren Kenntniss wir zur Berechnung von U bedürfen. Aber leider erhalten wir dieselbe in der vollständigen Entwicklung von $\Pi \rho$ nicht isolirt; sondern, da die totale Combination $J = AB \dots C$ auf verschiedene Weisen in p primitive Combinationen von der Form A zerlegt werden kann, so wird in der Entwicklung des genannten Totalproductes $\Pi \rho$ die Combination

$$J = a_1^{\alpha_1} b_1^{\beta_1} \dots k_1^{\kappa_1} \times a_2^{\alpha_2} b_2^{\beta_2} \dots k_2^{\kappa_2} \times \dots \times a_m^{\alpha_m} b_m^{\beta_m} \dots k_m^{\kappa_m} \\ [\alpha_1 + \beta_1 + \dots + \kappa_1 = \alpha_2 + \beta_2 + \dots + \kappa_2 = \dots = \alpha_m + \beta_m + \dots + \kappa_m = p]$$

mit einem Aggregate verschiedener symmetrischer Functionen von der Form $\Sigma \overset{1}{P} \overset{2}{Q} \dots \overset{p}{R}$ multiplicirt erscheinen. Die vergleichende Entwicklung des Productes $u_1 u_2 \dots u_m$ wird uns daher keineswegs zur nöthigen Kenntniss der einzelnen symmetrischen Function $\Sigma \overset{1}{P} \overset{2}{Q} \dots \overset{p}{R}$ führen.

Versuchen wir diesem Uebelstande zu begegnen, indem wir in der Combination A die unteren Zeiger 1, 2, $\dots, m$ auf alle möglichen Arten vertauschen, so werden alle so erhaltenen Combinationen A mit der nämlichen zur ersten Gruppe gehörenden Wurzelcombination $\overset{1}{P}$ multiplicirt sein. Wir erhalten demnach $\Sigma A \times \overset{1}{P}$ als Glied des Specialproductes $\overset{1}{\rho}_1 \overset{1}{\rho}_2 \dots \overset{1}{\rho}_m$, wo ΣA eine primitive symmetrische Function aller Coëfficientengruppen der m linearen Polynome ρ bezeichnet. Wenn nun $\Sigma B \times \overset{2}{Q}, \dots, \Sigma C \times \overset{p}{R}$ auch solche Glieder der übrigen Specialproducte $\overset{2}{\rho}_1 \overset{2}{\rho}_2 \dots \overset{2}{\rho}_m, \dots, \overset{p}{\rho}_1 \overset{p}{\rho}_2 \dots \overset{p}{\rho}_m$ bezeichnen, und wir nach geschehener Multiplication aller dieser p Glieder die oberen Zeiger permutiren, so werden wir

$$\Sigma A . \Sigma B \dots \Sigma C \times \Sigma \overset{1}{P} \overset{2}{Q} \dots \overset{p}{R}$$

als Glied des Totalproductes $\Pi \rho$ bekommen. Könnten wir dann auf eine sichere einzige Weise jede in der Entwicklung des Productes $u_1 u_2 \dots u_m$ vorkommende symmetrische Function ΣJ in ein Aggregat von Producten primitiver symmetrischer Functionen, wie ΣA , zerlegen, so wäre dann in der That die Aufgabe gelöst; ja wir könnten geradezu die primitiven symmetrischen Functionen der linearen Elemente durch die entsprechenden Coëfficienten des höheren Polynoms φ ersetzen, um sogleich das Product $u_1 u_2 \dots u_m$ in die gesuchte Resultante U überzuführen, ohne dass wir erst noch den Ausdruck für jede einzelne symmetrische Wurzelfunction $\Sigma \overset{1}{P} \overset{2}{Q} \dots \overset{p}{R}$ zu ermitteln brauchten.

Aber auf diesem Wege tritt uns die Unsicherheit jener Zerfällung von ΣJ hemmend entgegen, welche ihren Grund in der gegenseitigen Abhängigkeit der primitiven Functionen ΣA hat, und wir gestehen, dass wir hier einstweilen noch keinen Ausweg wissen.

§. 5. Bevor wir weiter gehen, fassen wir hier die Eigenschaften der Resultante, die unmittelbar aus dem Obigen folgen, kurz zusammen.

1. Die Resultante ist in Beziehung auf alle Elemente einer und derselben ursprünglichen Gleichung homogen und von einem Grade, welcher gleich ist dem Product der Grade aller übrigen Gleichungen.

2. Die Summe der gleichnamigen Zeiger aller Elemente, aus denen irgend ein Glied der Resultante zusammengesetzt ist, ist immer gleich dem Producte der

Grade aller Gleichungen des Systemes, auf welche Variable sich diese Zeiger auch beziehen mögen.

Denn, wenn man im gegebenen Systeme αx an die Stelle von x setzt, so erscheinen alle früheren Elemente jetzt mit einer Potenz von α multiplicirt, deren Exponent ihrem auf x bezüglichen Zeiger gleich ist. Hierdurch darf aber die Form der Resultante u nicht geändert werden, sie wird nur eine Potenz von α zum Factor bekommen. Für die übrigen Variablen gilt das Gleiche. Der Exponent dieser Potenz wird daher bleiben, wenn wir resp. $\beta y, \gamma z$ etc. an die Stelle von $y, z, \dots$ setzen. Bezeichnen wir ihn mit p , so geht die Resultante u in $(\alpha\beta\gamma\dots)^p u$ über. Setzen wir jetzt $\alpha = \beta = \gamma = \dots$, so werden alle Elemente irgend einer ursprünglichen Gleichung eine ihrem Grade entsprechende Potenz von α zum Factor bekommen, und da der Grad der Resultante in Beziehung auf diese Elementenreihe gleich ist dem Producte der Grade aller übrigen Gleichungen, so bringt diese einzige Gleichung des Systemes eine Potenz von α , deren Exponent dem Producte der Grade sämtlicher ursprünglichen Gleichungen gleich ist, als Factor von u mit sich. Der totale Factor ist also eine Potenz von α , deren Exponent gleich ist dem Producte der Anzahl aller Gleichungen mit dem Producte ihrer Grade. Folglich ist jener Exponent p gleich diesem Producte aller Grade.

3. Wenn in der Resultante nur die Elemente irgend einer ursprünglichen Gleichung litteral bleiben, alle übrigen aber numerisch angenommen werden, so kann die Resultante in lauter lineare Factoren zerlegt werden.

4. Bezeichnet U die Resultante eines Systemes, dessen erste Gleichung $\varphi = 0$ zerfällbar ist, so dass $\varphi = f f' f'' \dots$, und sind dann $V, V', V'', \dots$ die Resultanten der Systeme, welche sich vom vorigen nur dadurch unterscheiden, dass sie statt $\varphi = 0$ resp. $f = 0, f' = 0, f'' = 0, \dots$ zur ersten Gleichung haben, so ist

$$U = V V' V'' \dots$$

Einen Beweis halte ich für überflüssig.

Bemerkung. Wenn auch nur zwei ursprüngliche Polynome einen gemeinschaftlichen Factor haben, so ist die Resultante mit Null identisch.

5. Es sei ein System von $n + 1$ Gleichungen $\varphi = 0, \varphi_1 = 0, \dots, \varphi_n = 0$ zwischen den $n + 1$ Variablen $x, y, z, \dots$ gegeben, resp. von den Graden $m, m_1, m_2, \dots, m_n$. Im Polynom φ sei a der Coefficient von x^m und $m_1 m_2 \dots m_n = \mu$. Dann ist a^μ die höchste Potenz von a , welche in der Resultante u des Systemes vorkommt. Das Aggregat aller durch a^μ theilbaren Glieder sei $a^\mu A$, so ist A die m^{te} Potenz der Resultante der Gleichungen $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \dots, \varphi_n = 0$, wenn darin $x = 0$ gesetzt wird.

Der Beweis ist leicht zu führen. In den durch a^μ theilbaren Gliedern können ausserdem keine Elemente des Polynoms φ mehr vorkommen, weil μ der Grad ist, den u in Beziehung auf alle diese Elemente hat. Das Aggregat $a^\mu A$ ändert sich also nicht, wenn wir $\varphi = a x^m$ setzen. Vereinigt man aber die lineare Gleichung $x = 0$ mit den Gleichungen $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \dots, \varphi_n = 0$ zu einem Systeme, dessen Resultante X heissen möge, so gilt die Gleichung $\varphi = 0$ als eine m -fache Wiederholung jener linearen Gleichung, und wenn sie dieselbe im Systeme ersetzt, so wird die Resultante $a^\mu X^m$. Folglich ist $A = X^m$.

6. Es sei ein Polynom $\varphi(x, y, z, \dots)$ mit n Variablen und vom m^{ten} Grade gegeben, U die Resultante der n abgeleiteten Gleichungen $\frac{d\varphi}{dx} = 0, \frac{d\varphi}{dy} = 0, \frac{d\varphi}{dz} = 0, \dots$ etc.¹⁾. Dann wird U in Beziehung auf die Elemente einer jeden dieser Gleichungen vom $(m-1)^{n-1^{\text{ten}}}$ Grade, also in Beziehung auf die Elemente des ursprünglichen Polynoms vom $n(m-1)^{n-1^{\text{ten}}}$ Grade sein.

Werden die Zeiger der Elemente nach ihrer Stellung im Polynome φ bestimmt, so sind in $\frac{d\varphi}{dx}$ alle auf x bezüglichen Zeiger um 1 höher, als wenn sie nach ihrer Stellung in diesem abgeleiteten Polynome

¹⁾ Wir wollen diese künftig einfach die Resultante des Polynoms φ heissen.

bestimmt wären u. s. f. Da nun U nach der im allgemeinen Falle gültigen Schätzung in Beziehung auf die Coefficienten von $\frac{d\varphi}{dx}$ vom $(m-1)^{n-1}$ ten Grade ist, so hat man noch eben so viele Einheiten der Zahl $(m-1)^n$ beizufügen, welche nach jener allgemeinen Schätzung die Summe der auf x bezüglichen Zeiger in U ausmachen würde. Also ist in jedem Gliede der Resultante U die Summe der gleichnamigen Zeiger $m(m-1)^n$.

§. 6. Die nach den Elementen einer und derselben ursprünglichen Gleichung genommenen Differential-Coëfficienten der Resultante sind mit den entsprechenden Combinationen der Variabeln proportional.

Beweis. Bezeichnet u die Resultante und variirt man bloss zwei in derselben ursprünglichen Gleichung vorkommende Elemente a und b , so dass die Endgleichung $u = 0$ erfüllt bleibt, so wird

$$\frac{du}{da} da + \frac{du}{db} db = 0$$

sein. Durch alle übrigen Gleichungen sind aber die Verhältnisse der Variabeln schon in Functionen der Elemente dieser Gleichungen bestimmt und müssen daher gleichzeitig mit diesen als constant gedacht werden. Wenn nun p, q die mit den Coëfficienten a, b behafteten Variabeln-Combinationen bezeichnen, so dass $ap + bq$ zwei Glieder der linken Seite der isolirten ursprünglichen Gleichung sind, so folgt nothwendig

$$p da + q db = 0$$

und hieraus

$$p : q = \frac{du}{da} : \frac{du}{db}.$$

Die Richtigkeit des ausgesprochenen Satzes ist somit bewiesen.

Wir können uns auch so davon überzeugen. Wenn $\varphi(x, y, \dots) = 0$ die betrachtete ursprüngliche Gleichung ist, und $\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(\mu)$ resp. die Werthe bezeichnen, welche ihr Polynom annimmt, wenn darin für $x, y, \dots$ die Wurzelgruppen des Systemes aller übrigen Gleichungen, $x_1, y_1, \dots; x_2, y_2, \dots; \dots; x_\mu, y_\mu, \dots$ substituirt werden, so ist

$$u = \varphi(1) \times Q,$$

wo $Q = \varphi(2) \times \varphi(3) \times \dots \times \varphi(\mu)$ gesetzt wurde. Ist es nun der erste Factor, welcher das Verschwinden von u bewirkt, so dass die Elemente des Polynoms φ der in Beziehung auf dieselben linearen Gleichung $\varphi(1) = 0$ genügen, und bezeichnet δ die vollständige Differentiation in Beziehung auf alle diese Elemente, so ist offenbar

$$\delta u = Q \times \delta \varphi(1) = Q \times (p \delta a + q \delta b + \text{etc.}),$$

eine Gleichung, die uns den ausgesprochenen Satz unmittelbar vergegenwärtigt.

Bemerkung. Gehören zu einer und derselben Lösung der Gleichung $u = 0$ zwei verschiedene Systeme von Werthen der Verhältnisse der Variabeln $x, y, \dots$, so dürfen diese nicht durch die Differential-Coëfficienten von u bestimmt sein; also müssen alle diese Differential-Coëfficienten verschwinden. Ein solcher Fall kann unter anderm eintreten, wenn u einen potenzierten Factor hat, und dieser verschwindet.

Wenn alle abgeleiteten Functionen eines ursprünglichen Polynoms verschwinden, so sind die nach seinen Elementen genommenen Differential-Coëfficienten seiner Resultante proportional mit den Variabeln-Combinationen, welche mit den betreffenden Elementen multiplicirt sind.

Wenn nämlich die abgeleiteten Polynome $\frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}, \dots$ verschwinden, so verschwindet auch das ursprüngliche Polynom φ . Differentiirt man dasselbe nach den Elementen a, b , wenn wiederum wie oben $ap + bq$ zwei seiner Glieder bezeichnen, und beachtet, dass die abgeleiteten Polynome verschwinden, so

ergibt sich $pda + qdb = 0$, obgleich sämtliche Variablen als Functionen von a, b anzusehen sind. Ist u die Resultante, so folgt wieder wie oben

$$p : q = \frac{du}{da} : \frac{du}{db}.$$

Ist das ursprüngliche Polynom, mit mehr als zwei Variablen, theilbar, so ist seine Resultante mit Null identisch.

Es sei z. B. $\varphi = ff'$, so wird das System der abgeleiteten Gleichungen

$$f' \frac{df}{dx} + f \frac{df'}{dx} = 0, f' \frac{df}{dy} + f \frac{df'}{dy} = 0, \text{ etc.}$$

auch durch die Annahme $f = 0, f' = 0$ befriedigt. Da dies nicht hinreicht, um eine Relation zwischen den Elementen zu liefern, so muss die Resultante identisch verschwinden.

Sind nur zwei Variablen, das Polynom also begreiflich immer theilbar, so seien U, u, u' resp. die Resultanten der Polynome φ, f, f' und V diejenige der Gleichungen $f = 0, f' = 0$, so ist

$$U = V^2 uu'.$$

Wenn ein ursprüngliches Polynom als Aggregat von Producten mehrerer anderer Polynome (kein Theil des Aggregats darf einfach sein), deren Zahl geringer ist als diejenige der Variablen, dargestellt werden kann, so verschwindet seine Resultante identisch.

Es sei ein homogenes Polynom $\varphi(x, y, z, \dots) = \Phi(f, f', f'', \dots)$, wo Φ nur eine ganze Function, die nicht homogen zu sein braucht, aber kein lineares Glied enthalten darf, $f, f', f'', \dots$ beliebige homogene Polynome der Variablen $x, y, \dots$ bezeichnen, deren Anzahl geringer ist als diejenige dieser ursprünglichen Variablen, so ist

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\Phi}{df} \frac{df}{dx} + \frac{d\Phi}{df'} \frac{df'}{dx} + \dots, \quad \frac{d\varphi}{dy} = \frac{d\Phi}{df} \frac{df}{dy} + \frac{d\Phi}{df'} \frac{df'}{dy} + \dots, \text{ etc.}$$

Das System der Gleichungen $\frac{d\varphi}{dx} = 0$, etc. wird durch die Annahme $\frac{d\Phi}{df} = 0, \frac{d\Phi}{df'} = 0$, etc. befriedigt. Da aber diese letzteren Gleichungen nicht hinreichen, um die Verhältnisse der Variablen daraus zu eliminiren, so muss die Resultante von φ verschwinden.

§. 7. Ist u die Resultante eines Systemes, dessen erste (vollständige) Gleichung nicht niedriger ist als die zweite, und denkt man sich diese mit irgend einer Variablen-Combination multiplicirt, welche sie auf den gleichen Grad mit der ersten erhebt; differentiirt man ferner die Resultante u nach allen Elementen ersten Ranges und ersetzt ihre Differentiale durch die vermöge jener Multiplication homolog gewordenen Elemente zweiten Ranges, so ist das Ergebniss dieser ableitenden Operation mit Null identisch.

Es sei D die genannte Operation, $\varphi = 0, \varphi_1 = 0$ die erste und zweite Gleichung des Systemes, t die Variablen-Combination, durch welche $t\varphi_1$ von gleichem Grade mit φ wird. Dann sind, wenn das System erfüllt ist, die Differential-Coëfficienten von u mit den entsprechenden Variablen-Combinationen in φ proportional; folglich Du proportional mit $t\varphi_1$. Da nun $\varphi_1 = 0$ ist, so muss Du immer gleichzeitig mit u verschwinden. Weil aber u untheilbar und Du in Beziehung auf die Elemente ersten Ranges um einen Grad niedriger ist als u , so kann, wenn jetzt wieder alle Elemente des Systemes unter sich unabhängig gedacht werden, Du nicht durch u theilbar sein. Folglich muss Du identisch verschwinden.

Besteht das System aus linearen Gleichungen $ax + by + \dots = 0, a'x + b'y + \dots = 0$ etc., so kömmt das Gesagte auf folgenden bekannten Satz in der Theorie der Determinanten zurück:

$$\text{Wenn } \Delta = \begin{pmatrix} a . b . c \\ a' . b' . c' \\ a'' . b'' . c'' \\ \end{pmatrix}, \text{ so ist } a' \frac{d\Delta}{da} + b' \frac{d\Delta}{db} + c' \frac{d\Delta}{dc} + \dots = 0.$$

§. 8. Sind die n Variabeln $x, y, z, \dots$ eines Systemes selbst wiederum sämmtlich homogene Functionen μ^{ten} Grades der n neuen Variabeln $\xi, \upsilon, \zeta, \dots$, und bezeichnet Φ die Resultante dieser n Functionen, so dass $\Phi = 0$ durch Elimination der $n-1$ Verhältnisse $\xi : \upsilon : \zeta : \dots$ aus den Gleichungen $x = 0, y = 0, z = 0$ etc. hervorgeht, bezeichnet ferner U die Resultante des ursprünglichen Systemes in $x, y, z, \dots$, und endlich Ω die Resultante des transformirten Systemes in $\xi, \upsilon, \zeta, \dots$, so ist

$$\Omega = \Phi^p U^{\mu^{n-1}},$$

wo p das Product der Grade aller Gleichungen des ursprünglichen Systemes bezeichnet.

Beweis. Die Resultante Φ des Systemes der Substitutionen ist in Beziehung auf seine Elemente vom Grade $n\mu^{n-1}$. Wenn m_1 den Grad der ersten Gleichung des ursprünglichen Systemes bezeichnet, so ist diese Gleichung, transformirt, in Beziehung auf die neuen Variabeln, auf die Elemente des ursprünglichen Systemes und auf diejenigen der Substitutionen resp. von den Graden $m_1\mu, 1, m_1$. Daher ist, wenn man nur diese Gleichungen berücksichtigt, die Resultante Ω des transformirten Systemes in den beiden letzten Beziehungen resp. von den Graden $\frac{p}{m_1}\mu^{n-1}$ und $p\mu^{n-1}$. Folglich ist Ω in Beziehung auf die Elemente der einzelnen Gleichungen des ursprünglichen Systemes resp. von den Graden $\frac{p}{m_1}\mu^{n-1}, \frac{p}{m_2}\mu^{n-1}, \dots, \frac{p}{m_n}\mu^{n-1}$, also von einem μ^{n-1} mal höhern Grade als U , und in Beziehung auf diejenigen der Substitutionen vom Grade $np\mu^{n-1}$, also von p mal höhern Grade als Φ . Nun sind aber bloss zwei Bedingungs-Gleichungen denkbar, unter denen das transformirte System erfüllt sein kann. Entweder nämlich verschwinden nicht sämmtliche ursprüngliche Variabeln $x, y, z, \dots$, und dann muss $U = 0$ sein; oder aber alle diese ursprünglichen Variabeln verschwinden, und dann muss $\Phi = 0$ sein. Daher kann Ω keine anderen Factoren als U und Φ haben. Berücksichtigt man aber die oben ermittelten Gradesverschiedenheiten, so folgt nothwendig

$$\Omega = \Phi^p U^{\mu^{n-1}}.$$

Sind die Substitutionen linear: $x = \lambda\xi + \mu\upsilon + \dots, y = \lambda'\xi + \mu'\upsilon + \dots$, etc. so geht Φ in die Determinante $\Delta = \Sigma \pm \lambda\mu'\nu'' \dots$ über, und wir bekommen $\Omega = \Delta^p U$.

Sind dagegen die Gleichungen des ursprünglichen Systemes linear: $\lambda x + \mu y + \nu z + \dots = 0, \lambda'x + \mu'y + \dots = 0$, etc., so geht U in Δ über, und wir bekommen

$$\Omega = \Delta^{\mu^{n-1}} \Phi.$$

Es gelten also folgende zwei speciellen Sätze:

1. Wenn sämmtliche Variabeln durch lineare und homogene Substitutionen transformirt werden, so ist die Resultante des neuen Systemes gleich dem Producte der Resultante des ursprünglichen Systemes mit einer Potenz der Determinante der Substitutions-Coëfficienten, deren Exponent gleich ist dem Producte der Grade aller Gleichungen des Systemes.

2. Es seien n homogene Gleichungen m^{ten} Grades mit n Variabeln gegeben, und U sei ihre Resultante. Man multiplicire jede Gleichung mit einem beliebigen Factor und addire dann alle zusammen. Man wiederhole dies mehrere Male mit immer andern Reihen von je n Factoren, bis endlich n neue Gleichungen durch Addition entstanden sind. Ihre Resultante sei U' und die Determinante der gebrauchten Factoren sei Δ . Dann ist

$$U' = \Delta^{m^{n-1}} U.$$

Sind alle Functionen linear, so bekommen wir einen bekannten Satz aus der Determinantentheorie, der schon in §. 1 angeführt wurde.

§. 9. Es sei $f(x, y, z, \dots)$ ein homogenes Polynom m^{ten} Grades mit n Variablen, U die Resultante der n abgeleiteten Gleichungen $\frac{df}{dx} = 0$, etc. Man transformire das ursprüngliche Polynom mittelst linearer Substitutionen $x = \lambda x' + \mu y' + \dots$, $y = \lambda' x' + \mu' y' + \dots$, etc., Δ sei die Determinante ihrer Coefficienten λ, μ , etc. Endlich sei U' die Resultante der abgeleiteten Gleichungen des transformirten Polynoms $\frac{df}{dx'} = 0$, $\frac{df}{dy'} = 0$, ... Dann ist

$$U' = \Delta^{m(m-1)^{n-1}} U.$$

Beweis. Da die Gleichungen $\frac{df}{dx} = 0$, $\frac{df}{dy} = 0$, ... alle vom $(m-1)^{\text{ten}}$ Grade sind, so ist nach geschehener Transformation der Variablen ihre Resultante $\Delta^{(m-1)^n} U$. Es ist nun $\frac{df}{dx'} = \lambda \frac{df}{dx} + \lambda' \frac{df}{dy} + \lambda'' \frac{df}{dz} + \dots$, etc., folglich die Resultante des Systemes der in Beziehung auf die neuen Variablen abgeleiteten Gleichungen

$$U' = \Delta^{(m-1)^{n-1}} \times \Delta^{(m-1)^n} U = \Delta^{m(m-1)^{n-1}} U.$$

Der Beweis kann übrigens auch so wie in §. 8 geführt werden. Denn das System der aus dem transformirten Polynom abgeleiteten Gleichungen kann nicht anders bestehen, als entweder, indem das ursprüngliche System, ohne dass die ursprünglichen Variablen verschwinden, besteht, also $U = 0$ ist, oder, indem die linearen Substitutionen für $x, y, z, \dots$ verschwinden, was $\Delta = 0$ zur Folge hat. Nun sind die Gleichungen des zweiten Systemes in Beziehung auf $\lambda, \mu, \dots$ vom m^{ten} Grade, folglich die Resultante U' vom $n m (m-1)^{n-1}$ Grade; sie hat also den Factor $\Delta^{m(m-1)^{n-1}}$ bekommen.

§. 10. Wird die Resultante eines Systemes algebraischer Gleichungen vollständig differentiirt und das Differential jedes Elementes durch ein Element gleichen Ranges ersetzt, in welchem die auf irgend zwei bestimmte Variablen bezüglichen Zeiger um 1 vermindert und um 1 vermehrt sind, und welchem überdies der letztere um 1 vermehrte Zeiger als Factor vorgesetzt ist, so ist das so abgeleitete Polynom mit Null identisch.

Beweis. Das System sei $f_i(x, y, z, \dots) = 0$ [$i = 1, 2, 3, \dots, n$], seine Resultante U . Man transformire mittelst der linearen Substitutionen $x = \lambda x' + \mu y' + \nu z' + \dots$, $y = \lambda' x' + \mu' y' + \dots$, etc., die Determinante der Substitutions-Coefficienten sei Δ . Irgend ein Glied der transformirten Gleichung sei, indem man das Element nach Rang und Zeigern bezeichnet, $\{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}_i x'^\alpha y'^\beta z'^\gamma \dots [\alpha + \beta + \gamma + \dots = m_i]$. Der Coefficient der höchsten Potenz von x ist $\{m_i, 0, 0, \dots\}_i = f_i(\lambda, \lambda', \lambda'', \dots)$. Aus diesem können alle übrigen mittelst der Taylor'schen Formel abgeleitet werden. Führt man nämlich die Ableitungszeichen $M = \mu \frac{d}{d\lambda} + \mu' \frac{d}{d\lambda'} + \dots$, $N = \nu \frac{d}{d\lambda} + \nu' \frac{d}{d\lambda'} + \dots$, etc., etc. ein, so ist z. B.

$$\{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}_i = \frac{M^\beta N^\gamma \dots}{1.2 \dots \beta \times 1.2 \dots \gamma \times \dots} f_i(\lambda, \lambda', \lambda'', \dots).$$

Vergleicht man die ähnliche Formel für $\{\alpha-1, \beta+1, \gamma, \dots\}_i$, so sieht man, dass

$$M \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}_i = (\beta+1). \{\alpha-1, \beta+1, \gamma, \dots\}_i$$

ist. Da ferner $M\Delta = 0$ ist, so erhellt sogleich, dass das Ergebniss der auf die Resultante $\Delta^n U = U'$ des transformirten Systemes ausgeübten Operation M mit Null identisch ist. D. h. es ist

$$\sum_{i=1}^{i=n} (\beta+1). \{\alpha-1, \beta+1, \gamma, \dots\}_i \frac{dU'}{d\{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}_i} = 0.$$

Da diese identische Gleichung keine Spur mehr von der Art der Entstehung der Elemente des transformirten Systemes an sich trägt, so gilt sie auch für das ursprüngliche System.

Besteht das System aus den linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} a x + b y + c z + \dots &= 0, \\ a' x + b' y + c' z + \dots &= 0, \\ a'' x + b'' y + c'' z + \dots &= 0, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

und ist Δ die Determinante seiner Elemente, so kommt der so eben bewiesene Satz auf

$$b \frac{d\Delta}{da} + b' \frac{d\Delta}{da'} + b'' \frac{d\Delta}{da''} + \text{etc.} = 0$$

zurück.

Wird $p = m_1 m_2 \dots m_n$ gesetzt, so ist

$$\sum_{i=1}^{i=n} \alpha \{ \alpha, \beta, \gamma, \dots \}_i \frac{dU}{d[\alpha, \beta, \dots]_i} = p U.$$

Diese Gleichung erhellt, wenn man ein einzelnes Glied der Resultante U betrachtet, aus dem Satz, dass die Summe der auf x bezüglichen Zeiger gleich p ist.

§. 11. Hat man die Resultante der abgeleiteten Gleichungen eines ursprünglichen Polynoms darzustellen, so ist es passend, seine Coefficienten aus einem litteralen Element und einem numerischen Factor, gleich der Permutationszahl der entsprechenden Variabeln-Combination, zusammen zu setzen. Das Analogon des vorigen Satzes lautet dann so:

Wird die Resultante vollständig differentiirt und das Differential eines jeden Elementes ersetzt durch das Product seines auf eine erste Variable bezüglichen Zeigers mit einem anderen Elemente, worin dieser Zeiger um 1 vermindert und der auf eine zweite Variable bezügliche Zeiger um 1 vermehrt ist, so ist das Ergebniss dieser ableitenden Operation mit Null identisch.

Beweis. Ein ursprüngliches Polynom m^{ten} Grades mit n Variabeln, $f(x, y, z, \dots)$, gehe durch die linearen Substitutionen $x = \lambda x' + \mu y' \dots$, $y = \lambda' x' + \dots$, etc. in

$$\sum \frac{1.2.3.4 \dots m}{1.2 \dots \alpha \times 1.2 \dots \beta \times 1.2 \dots \gamma \times \dots} \{ \alpha, \beta, \gamma, \dots \} x'^{\alpha} y'^{\beta} z'^{\gamma} \dots$$

über, so ist, wenn $M, N, \dots$ dieselben Operationen wie oben bedeuten,

$$\{ \alpha, \beta, \gamma, \dots \} = \frac{1.2 \dots \alpha}{1.2 \dots m} M^{\beta} N^{\gamma} \dots f(\lambda, \lambda', \lambda'', \dots),$$

also

$$M \{ \alpha, \beta, \gamma, \dots \} = \alpha \cdot \{ \alpha - 1, \beta + 1, \gamma, \dots \}.$$

Sind jetzt U, U' resp. die Resultanten des ursprünglichen und des transformirten Polynoms, so ist

$$U' = \Delta^{m(m-1)^{n-1}} U,$$

also $M U' = 0$, woraus sich die Richtigkeit des ausgesprochenen Satzes ergibt.

§. 12. Es sei u die Resultante des Systemes von n Gleichungen

$$\begin{aligned} f(x, y, \dots) + h(p x + q y + \dots)^m &= 0, \\ f'(x, y, \dots) + h'(p x + q y + \dots)^{m'} &= 0, \\ &\text{etc.}, \end{aligned}$$

wo $f, f', \dots$ vollständige homogene Polynome $m^{\text{ten}}, m'^{\text{ten}}, \dots$ Grades der n Variabeln $x, y, \dots$ und $h, h', \dots, p, q, \dots$ beliebige Constanten bezeichnen. Man verlangt den höchsten Grad zu kennen, den u in Beziehung auf alle n Factoren $h, h', h'', \dots$ erreicht. Das System kann durch Folgendes ersetzt werden, welches eine Variable w und eine lineare Gleichung mehr enthält:

$$\begin{aligned} px + qy + \dots - sw &= 0, \\ f(x, y, \dots) + hs^m w^m &= 0, \\ f'(x, y, \dots) + h's^{m'} w^{m'} &= 0, \\ \text{etc.} \end{aligned}$$

Wird das Product $mm'm'' \dots = \pi$ gesetzt, so bleibt der Grad der Resultante in Beziehung auf die Coëfficienten des Polynoms f und auf hs^m wie vorher, nämlich $\frac{\pi}{m}$, und die Summe der auf w bezüglichen Zeiger wird π sein. In irgend einem Gliede der Resultante seien $\lambda, \alpha, \alpha', \dots$ resp. die Exponenten der Elemente $-s, hs^m, h's^{m'}, \dots$, deren auf w bezügliche Zeiger offenbar $1, m, m', \dots$ sind. Dann ist

$$\lambda + \alpha m + \alpha' m' + \dots = \pi.$$

Es sei keiner der übrigen Grade niedriger als m , so ist

$$(\alpha + \alpha' + \alpha'' + \dots) m \leq \pi - \lambda,$$

also:

$$\alpha + \alpha' + \alpha'' + \dots \leq \frac{\pi}{m}.$$

Also ist, wenn wir wiederum das erste System betrachten, der Grad seiner Resultante u , in Beziehung auf alle Factoren $h, h', \dots$ zusammen, höchstens gleich dem Grade, den u in Beziehung auf die Elemente der niedrigsten Gleichung des Systemes erreicht. Ist m kleiner als alle übrigen Grade, so kann für das höchste Glied nur $\lambda = \alpha' = \alpha'' = \dots = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{m}$ sein. Das höchste Glied ist also dasjenige mit $h^{\frac{\pi}{m}}$, und die mit dieser Potenz multiplicirte Function der übrigen Elemente ist die m^{te} Potenz der Resultante des Systemes der n Gleichungen

$$\begin{aligned} px + qy + \dots &= 0, \\ f(x, y, \dots) &= 0, \\ f'(x, y, \dots) &= 0, \\ \text{etc.} \end{aligned}$$

§. 13. Es sei u die Resultante eines ursprünglichen Systemes von n Gleichungen zwischen den n Variablen $x, y, z, \dots$; ihre Grade seien resp. $m, m', m'', \dots$. Man bilde eine Anzahl ν von beliebigen Variablen-Combinationen $p, q, \dots$ desselben Grades λ , und denke sich ein secundäres System von ν Gleichungen mit den ν Variablen $\xi, \upsilon, \zeta, \dots$ und von den Graden $\mu, \mu', \mu'', \dots$, wo die Coëfficienten erst noch zu bestimmen sind. In diesen vollständig gedachten Gleichungen setze man für einen Augenblick $p, q, \dots$ resp. an die Stelle von $\xi, \upsilon, \dots$, so wird man ν Reihen neuer Variablen-Combinationen erhalten, welche resp. von den Graden $\lambda\mu, \lambda\mu', \lambda\mu'', \dots$ sind. Keiner dieser Grade darf den höchsten der Grade $m, m', m'', \dots$ des ursprünglichen Systemes übertreffen. Man multiplicire nun die ν Reihen resp. mit beliebigen Combinationen $t, t', t'', \dots$ der Variablen $x, y, \dots$, um sie mit Gleichungen des ursprünglichen Systemes, deren Rangzahlen $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots$ sein mögen, auf denselben Grad zu erheben. Wiederholungen derselben Rangzahl, und die Einheit (Nullgrad) unter den Combinationen $t, t', \dots$ sind nicht ausgeschlossen. Man nehme dann die Differential-Coëfficienten von u nach denjenigen Elementen des ursprünglichen Systemes, welche in Bezug auf Rang und Zeiger den ν zuletzt erhaltenen Reihen von Variablen-Combinationen entsprechen, und setze sie als Coëfficienten der Combinationen von $\xi, \upsilon, \zeta, \dots$, multiplicirt mit den Permutationszahlen dieser letzteren, ins secundäre System hinein. Nach geschehener Elimination der $\nu - 1$ Verhältnisse $\xi : \upsilon : \zeta : \dots$ habe man U als Resultante dieses zweiten Systemes gefunden. Wenn nun μ der niedrigste Grad seiner Gleichungen, $\pi = \mu\mu'\mu'' \dots$ das Product aller Grade,

und $\sigma = \frac{\pi}{\mu} + \frac{\pi}{\mu'} + \frac{\pi}{\mu''} + \dots$ der Grad der Resultante U in Bezug auf alle Coëfficienten des secundären Systemes ist, so behaupte ich,

dass U durch $u^{\sigma - \frac{\pi}{\mu}}$ theilbar sei.

Denn, wäre das ursprüngliche System erfüllt, so wären die Differential-Coëfficienten von u mit den entsprechenden Variabeln-Combinationen proportional, und die Gleichungen des secundären Systemes erhielten die Gestalt

$$t(p\xi + qv + \dots)^{\mu} = 0, \quad t'(p\xi + qv + \dots)^{\mu'} = 0, \text{ etc.},$$

wären also erfüllt, sobald nur die einzige Gleichung $p\xi + qv + \dots = 0$ erfüllt ist. Die Resultante U würde daher schon von selbst verschwinden. Dadurch ist eine Potenz von u als Theiler von U angezeigt. Um nun den Exponenten dieser Potenz von u zu finden, denken wir uns sämtliche Grössen des ursprünglichen Systemes um verschwindende Incremente erster Ordnung von den das System befriedigenden Werthen verschieden, so dass auch u zu einer Grösse erster Ordnung wird. Dann werden auch die Differential-Coëfficienten von u nur um Grössen erster Ordnung von der Proportionalität mit jenen Variabeln-Combinationen abweichen; und das secundäre System wird sein

$$t(p\xi + qv + \dots)^{\mu} + \varphi(\xi, v, \dots) = 0,$$

$$t'(p\xi + qv + \dots)^{\mu'} + \varphi'(\xi, v, \dots) = 0,$$

etc.,

wo $\varphi, \varphi', \dots$ Polynome vom $\mu^{\text{ten}}, \mu'^{\text{ten}}, \dots$ Grade bezeichnen, deren Coëfficienten verschwindende Grössen erster Ordnung sind. Wenn nun μ nicht grösser als irgend einer der übrigen Grade $\mu', \mu'', \dots$ und $\pi = \mu\mu'\mu'' \dots$ ist, so ist nach §. 12 die grösste Dimension, welche die Resultante U in Beziehung auf die endlichen Grössen $t, t', \dots$ haben kann, $\frac{\pi}{\mu}$. Da aber U in Beziehung auf alle Coëfficienten des Systemes zusammen vom Grade $\sigma = \frac{\pi}{\mu} + \frac{\pi}{\mu'} + \dots$ ist, so folgt, dass U in Beziehung auf die verschwindenden Grössen erster Ordnung vom Grade $\sigma - \frac{\pi}{\mu}$ sein muss, d. h. U ist von derselben Ordnung mit

$$u^{\sigma - \frac{\pi}{\mu}},$$

woraus sofort — wegen der Untheilbarkeit von u — die Richtigkeit unserer Behauptung erhellt. — Noch höhere Theilbarkeit oder identisches Verschwinden von U sind natürlich nicht ausgeschlossen. Wir wollen Fälle, wo das letztere geschieht, noch näher bezeichnen. Es sei $\frac{p}{m}$ der Grad von u in Beziehung auf die ursprünglichen Elemente ersten Ranges, $\mu, \mu', \dots$ die Grade derjenigen Gleichungen des secundären Systemes, in denen Differential-Coëfficienten von u jenes ersten Ranges als Elemente auftreten, $\rho = \frac{\pi}{\mu} + \frac{\pi}{\mu'} + \dots$ der Grad von U in Beziehung auf sämtliche Differential-Coëfficienten ersten Ranges, endlich μ der Grad der niedrigsten Gleichung des secundären Systemes, so ist $\frac{p}{m} \frac{\pi}{\mu} - \rho$ der Grad des Quotienten $U : u^{\sigma - \frac{\pi}{\mu}}$ in Beziehung auf die ursprünglichen Elemente ersten Ranges. Dasselbe seien die Unterschiede $\frac{p}{m'} \frac{\pi}{\mu} - \rho', \frac{p}{m''} \frac{\pi}{\mu} - \rho'', \dots$ in Beziehung auf den zweiten, dritten, $\dots$ Rang. Wird nun einer dieser Unterschiede negativ, so muss U identisch verschwinden. Ist sogar die Summe aller dieser Unterschiede $s \frac{\pi}{\mu} - \sigma$ negativ, so muss a fortiori U verschwinden, (s bezeichnet den Grad der Resultante u in Beziehung auf ihre sämtlichen Elemente); noch mehr, wenn $v > s$.

Besteht das ursprüngliche System aus lauter linearen Gleichungen, so muss im secundären Systeme $\lambda = \mu = \mu' = \dots = 1$ sein. Dann ist $\sigma = v$ und daher U durch u^{v-1} theilbar. Der Quotient der Division ist uns aus der Determinantentheorie bekannt. Werden nämlich im Schema einer Determinante Δ vom n^{ten} Grade v beliebige Verticalzeilen mit $\xi, v, \dots$ und ebenfalls v Horizontalzeilen mit den Rangzahlen $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots$ (Wiederholungen derselben Rangzahl seien jetzt ausgeschlossen) bezeichnet, und in die Kreuzungspunkte beider Arten von bezeichneten Zeilen die betreffenden reciproken Elemente gesetzt, so

ist ihre Determinante gleich dem Producte von Δ^{v-1} mit der Determinante der im Schema nach Streichung aller bezeichneten Zeilen übrig bleibenden ursprünglichen Elemente.

Werden das ursprüngliche System und seine Resultante u durch ein einziges ursprüngliches Polynom f und die Resultante seiner abgeleiteten Gleichungen $\frac{df}{dx} = 0$, etc. ersetzt, so gilt der obige allgemeine Satz auch hier für die Resultante U eines secundären Systemes, worin die Differential-Coëfficienten von u , mit Permutationszahlen multiplicirt, als Elemente erscheinen. Man kann auch das secundäre System durch ein einziges Polynom und seine abgeleiteten Gleichungen ersetzen. Da der Beweis mit dem vorigen zusammenfällt, so brauchen wir hierbei nicht zu verweilen.

Wir behandeln in den folgenden §§. zunächst einen Fall, wo wir den Quotienten angeben können, nämlich den, wo die Rangzahlen $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots$ alle gleich und die Gleichungen des secundären Systemes sämmtlich linear sind, dann solche specielle Fälle, wo eine höhere Theilbarkeit namentlich durch u^{v-1} stattfindet, und zeigen endlich an anderen Fällen durch directe Rechnung, dass wir im Allgemeinen keine höhere Theilbarkeit erwarten dürfen.

§. 14. Es seien v äquidistante Differential-Coëfficienten der Resultante u , sämmtlich von gleichem Range, in ein Quadrat geordnet, so ist ihre Determinante durch u^{v-1} theilbar. Sie wird mit Null identisch, wenn v den Grad von u in Beziehung auf die ursprünglichen Elemente jenes Ranges übersteigt.

Wenn die Coëfficienten der ursprünglichen Gleichung $f(x, y, \dots) = 0$ jenes genannten Ranges bloss durch ihre Zeiger bezeichnet werden, so möge der Differential-Coëfficient

$$\frac{du}{d\{\alpha + \eta, \beta + \theta, \gamma + \kappa, \dots\}},$$

wo $\alpha + \eta + \beta + \theta + \gamma + \kappa + \dots = m$ sein muss, zuerst durch Variation der Gruppe $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ eine Reihe von v Gliedern liefern; dann mögen durch Variation der Gruppe $\eta, \theta, \kappa, \dots$ eine Anzahl v solcher Reihen entstehen. Die Determinante der so erhaltenen v äquidistanten Differential-Coëfficienten heisse Ω . Das Product der Grade aller übrigen Gleichungen des Systemes sei μ , und $x_1 : y_1 : \dots; x_2 : y_2 : \dots; \dots x_\mu : y_\mu : \dots$ die Wurzelgruppen derselben, $f(1), f(2), \dots f(\mu)$ die diesen Wurzelgruppen entsprechenden Werthe des Polynoms $f(x, y, \dots)$. Dann ist

$$u = f(1) \cdot f(2) \cdot \dots \cdot f(\mu),$$

und

$$\frac{du}{d\{\alpha + \eta, \beta + \theta, \dots\}} = u \left\{ \frac{x_1^\eta y_1^\theta \dots}{f(1)} x_1^\alpha y_1^\beta \dots + \frac{x_2^\eta y_2^\theta \dots}{f(2)} x_2^\alpha y_2^\beta \dots + \dots \right\}$$

$$= u \{p_1 X_1 + p_2 X_2 + \dots + p_\mu X_\mu\},$$

wo

$$p = \frac{x^\eta y^\theta z^\kappa \dots}{f(x, y, \dots)}, \quad X = x^\alpha y^\beta z^\gamma \dots$$

gesetzt wurde. Wenn nun die Gruppe $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ variirt, so möge X in $Y, Z, \dots$, und wenn $\eta, \theta, \kappa, \dots$ variiren, so möge p in $q, r, \dots$ übergehen. Nehmen wir der kürzeren Darstellung wegen $v = 3$ an, so wird

$$\Omega = u^3 \cdot \begin{vmatrix} \Sigma p X & \Sigma p Y & \Sigma p Z \\ \Sigma q X & \Sigma q Y & \Sigma q Z \\ \Sigma r X & \Sigma r Y & \Sigma r Z \end{vmatrix} = u^3 \cdot \begin{vmatrix} p_1 \cdot q_1 \cdot r_1 & X_1 \cdot Y_1 \cdot Z_1 \\ p_2 \cdot q_2 \cdot r_2 & X_2 \cdot Y_2 \cdot Z_2 \\ \vdots & \vdots \\ p_\mu \cdot q_\mu \cdot r_\mu & X_\mu \cdot Y_\mu \cdot Z_\mu \end{vmatrix},$$

also nach einem bekannten Satz:

$$\Omega = u^3 \cdot \Sigma \begin{vmatrix} p_a \cdot q_a \cdot r_a \\ p_b \cdot q_b \cdot r_b \\ p_c \cdot q_c \cdot r_c \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} X_a \cdot Y_a \cdot Z_a \\ X_b \cdot Y_b \cdot Z_b \\ X_c \cdot Y_c \cdot Z_c \end{vmatrix},$$

wo die Summe Σ sich auf alle Combinationen abc erstreckt, welche aus den unteren Zeigern $1, 2, 3, \dots, \mu$ gebildet werden können. Wenn nun u verschwindet, so wird im Allgemeinen nur einer der μ Werthe, welche das Polynom f durch Substitution der Wurzelgruppen erhält, zugleich verschwinden. Dieses geschehe durch die erste Wurzelgruppe. Dann werden nur p_1, q_1, r_1 von der Ordnung $\frac{1}{u}$ sein; alle ähnlichen Functionen der übrigen Wurzelgruppen bleiben endlich. Da nun Ω in Beziehung auf p_1, q_1, r_1 linear ist, so ist Ω von der Ordnung $u^3 \cdot \frac{1}{u}$, d. h. durch u^2 theilbar.

Oder so. In der Determinante $\Sigma \pm p_a q_b r_c$ haben alle sechs Glieder einen und denselben Nenner $f(a) \cdot f(b) \cdot f(c)$, welcher in u aufgeht. Mit u multiplicirt, werden also diese und alle ähnlichen Determinanten zu ganzen Functionen.

Setzen wir auch das secundäre System aus höheren Gleichungen zusammen und geben ihm, wie vorhin, lauter Differential-Coëfficienten desselben Ranges α zu Elementen, so dürfen wir auch da keine höhere Theilbarkeit erwarten. Das secundäre System wird folgende Form bekommen:

$$u \left\{ \frac{t_1}{f(1)} (p_1 \xi + q_1 \nu + \dots)^\mu + \frac{t_2}{f(2)} (p_2 \xi + q_2 \nu + \dots)^\mu + \text{etc.} \right\} = 0,$$

$$u \left\{ \frac{t'_1}{f(1)} (p_1 \xi + q_1 \nu + \dots)^{\mu'} + \frac{t'_2}{f(2)} (p_2 \xi + q_2 \nu + \dots)^{\mu'} + \text{etc.} \right\} = 0,$$

etc.,

wo $p, q, \dots$ Combinationen gleichen Grades der Variablen $x, y, \dots$, und $t, t', t'', \dots$ ebenfalls Combinationen derselben Variablen bezeichnen, durch welche die totalen Combinationen $tp^\mu, t'p^{\mu'}, \text{etc.}$ auf gleichen Grad mit der ursprünglichen Gleichung vom Range α erhoben werden, und wo die nach den Zeigern $1, 2, \dots$ fortschreitenden Summen sich auf die Wurzelgruppen des Systemes aller übrigen ursprünglichen Gleichungen beziehen.

Sind alle Gleichungen des secundären Systemes vom selben Grade μ , und ihre Anzahl ν gleich derjenigen der Wurzelgruppen, so ist die Resultante des secundären Systemes

$$U = u^{(\nu-1)\mu^{\nu-1}} \left\{ \begin{vmatrix} t_1 \cdot t_2 \dots t_\nu \\ t'_1 \cdot t'_2 \dots t'_\nu \\ \dots \dots \dots \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} p_1 \cdot p_2 \dots p_\nu \\ q_1 \cdot q_2 \dots q_\nu \\ \dots \dots \dots \end{vmatrix} \right\}^{\mu^{\nu-1}}.$$

Da sowohl das Quadrat einer alternirenden Function als auch das Product zweier alternirenden Functionen in eine symmetrische Function übergeht, so ist hier, μ mag gerade oder ungerade sein, der Quotient immer eine symmetrische Function der Wurzelgruppen. Da er übrigens die Elemente der Gleichung $f(x, y, \dots) = 0$ nicht enthält, so kann er auch nicht durch u theilbar sein. Es findet also keine höhere Theilbarkeit Statt.

§. 15. Wir wollen nun den Fall untersuchen, wo das ursprüngliche System nur aus zwei Gleichungen besteht, und das secundäre demselben genau nachgebildet ist. Setzt man $y = 1$, so mögen die zwei Gleichungen

$$f(x) = a_m x^m + \text{etc.} = 0,$$

$$\varphi(x) = b_n x^n + \text{etc.} = b_n (x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_n) = 0$$

das ursprüngliche System ausmachen. Dann ist

$$u = b_n^m f(x_1) f(x_2) \dots f(x_n),$$

$$\frac{du}{da_i} = u \sum \frac{x_i^i}{f(x_i)},$$

$$\text{und wenn } \theta_1 = \frac{f'(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_n)}, \text{ etc. gesetzt wird,}$$

$$\frac{du}{db_n} = \frac{u}{b_n} \left\{ m - \sum \frac{\theta_1 x_1^n}{f(x_1)} \right\}, \quad \frac{du}{db_i} = - \frac{u}{b_n} \sum \frac{\theta_1 x_1^i}{f(x_1)}.$$

Das secundäre System besteht also aus den zwei Gleichungen

$$u \sum \frac{(x_1 \xi + \nu)^m}{f(x_1)} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{u}{b_n} \left\{ m \xi^n - \sum \frac{\theta_1 (x_1 \xi + \nu)^n}{f(x_1)} \right\} = 0.$$

Nimmt man nun an, die Wurzel x_1 erfülle beide ursprünglichen Gleichungen, so ist, wenn $m > n$, nach §. 12 in Beziehung auf die verschwindenden Grössen $u, u^2, u^3, \dots$ das niedrigste Glied der Resultante U des secundären Systemes

$$\frac{u^{m+n} \theta_1^m}{b_n^m (f(x_1))^m} \left\{ \sum \frac{(x_2 - x_1)^m}{f(x_2)} \right\}^n.$$

Setzt man $f(x) = (x - x_1) g(x)$, so müsste also, wenn ein höherer Divisor als u^n existirte, die Summe

$$\sum \frac{(x_2 - x_1)^{m-1}}{g(x_2)}$$

verschwinden. Da aber x_1 von den Coefficienten des Polynoms $g(x)$ unabhängig ist, so wird dieses im Allgemeinen nicht geschehen.

Wenn aber $m = n$ ist, so multiplicire man die erste Gleichung mit $\frac{\theta_1}{b_n}$ und addire sie zur zweiten. Man wird das System

$$u \sum \frac{(x_1 \xi + \nu)^n}{f(x_1)} = 0, \quad \frac{u}{b_n} \left\{ n + \sum \frac{\theta_1 - \theta_2}{f(x_2)} (x_2 \xi + \nu)^n \right\} = 0$$

erhalten. Nach dem zweiten speciellen Satz in §. 8 hat dieses System dieselbe Resultante U wie das ursprüngliche. Ihr niedrigstes Glied in Beziehung auf u ist

$$\frac{u^{2n}}{b_n^n (f(x_1))^n} \left\{ n + \sum \frac{\theta_1 - \theta_2}{f(x_2)} (x_2 - x_1)^n \right\}^n.$$

Soll nun eine höhere Theilbarkeit von U als durch u^n stattfinden, so muss die eingeklammerte Summe verschwinden.

Um dies im Besonderen zu untersuchen, setzen wir zuerst $n=2$,

$$f(x) = (x - \alpha)(x - \gamma), \quad \varphi(x) = (x - \alpha)(x - \beta).$$

Dann wird

$$f'(\alpha) = \alpha - \gamma, \quad f'(\beta) = 2\beta - \alpha - \gamma, \quad \theta_1 = \frac{\alpha - \gamma}{\alpha - \beta}, \quad \theta_2 = \frac{\alpha + \gamma - 2\beta}{\alpha - \beta},$$

also die fragliche Summe

$$2 + \frac{\beta - \alpha}{\beta - \gamma} \left(\frac{\alpha - \gamma}{\alpha - \beta} - \frac{\alpha + \gamma - 2\beta}{\alpha - \beta} \right) = 0.$$

Hier ist also höhere Theilbarkeit vorhanden. In der That hat das System der Gleichungen

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a'x^2 + b'x + c' = 0$$

die Resultante

$$u = (ab' - a'b)(bc' - b'c) - (ca' - c'a)^2,$$

und wenn nun $\frac{du}{da}, 2\frac{du}{db}, \dots$ an die Stelle von $a, b, \dots$ gesetzt werden, so ergibt sich

$$U = 16u^3.$$

Werden dagegen zwei kubische Gleichungen

$$f(x) = (x - \alpha)(x^2 + hx + k) = 0, \quad \varphi(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = 0$$

gesetzt, so wird der Ausdruck, auf dessen Verschwinden es hier ankömmt, nach einigen Reductionen

$$\frac{(2\alpha - \beta - \gamma)^2}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + \frac{\beta + \gamma + h}{\beta - \gamma} \left\{ \frac{(\alpha - \gamma)^3}{(\alpha - \beta)(\gamma^2 + h\gamma + k)} - \frac{(\alpha - \beta)^3}{(\alpha - \gamma)(\beta^2 + h\beta + k)} \right\}.$$

Man braucht aber z. B. nur k unendlich gross sich zu denken, um einzusehen, dass dieser Ausdruck nicht verschwinden kann.

§. 16. Ein Fall von höherer Theilbarkeit ist der, wo beide Systeme aus mehreren linearen und nur einer höheren Gleichung bestehen, und wo die Rangzahlen $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots$ (siehe §. 13) sämmtlich verschieden sind.

Es seien

$$ax + by + cz + \dots + gv + hw + \dots = 0,$$

$$a'x + b'y + c'z + \dots + g'v + h'w + \dots = 0,$$

$$a''x + b''y + c''z + \dots + g''v + h''w + \dots = 0,$$

$$a'''x + b'''y + c'''z + \dots + g'''v + h'''w + \dots = 0,$$

$$f(x, y, z, \dots v, w, \dots) = 0$$

$n - 1$ lineare Gleichungen und eine m^{ten} Grades mit den n Variabeln $x, y, z, \dots v, w, \dots$. Den Horizontalzeilen der Elemente der linearen Gleichungen denke man sich noch die Zeile

$$A, B, C, \dots G, H, \dots,$$

über deren Elemente wir bald verfügen werden, übersetzt. Die Determinante aller nn in ein Quadrat geordneten Elemente heisse Δ . Bezeichnet man nun die reciproken Elemente durch Einklammerung der entsprechenden ursprünglichen, so ist die Resultante des Systemes

$$u = f((A), (B), (C), \dots (G), (H), \dots).$$

Die Werthe der abgeleiteten Functionen $f_x, f_y, f_z, \dots, f_v, f_w, \dots$, wenn darin $x = (A), y = (B)$, etc. gesetzt werden, seien jetzt

$$A, B, C, \dots, G, H, \dots,$$

so ist

$$\Delta = mu,$$

$$\frac{du}{da} = B \frac{d(B)}{da} + C \frac{d(C)}{da} + \dots = B \frac{d(a)}{dB} + C \frac{d(a)}{dC} + \dots = (a),$$

etc.

Das secundäre System bestehe nun aus $\nu - 1$ linearen und einer Gleichung μ^{ten} Grades mit den ν Variablen $\xi, \nu, \zeta, \dots$. Als Coëfficienten der linearen Gleichungen nehme man die auf die ν ersten Elemente $a, b, \dots$ der $\nu - 1$ ersten ursprünglichen Gleichungen bezüglichen Differential-Coëfficienten von u , und als Coëfficienten der höheren Gleichung solche Differential-Coëfficienten letzten Ranges, welche der aus den ν ersten Variablen $x, y, \dots$ gebildeten Reihe von Combinationen μ^{ten} Grades, multiplicirt mit irgend einer Combination $(m - \mu)^{\text{ten}}$ Grades aus den n Variablen $x, y, \dots v, w, \dots$ entsprechen, und gebe denselben noch die Permutationszahlen der betreffenden Combinationen von $\xi, \nu, \zeta, \dots$ zu numerischen Factoren. Dann wird das secundäre System in folgender Gestalt erscheinen:

$$\begin{aligned} (a) \xi + (b) \nu + (c) \zeta + \dots &= 0, \\ (a') \xi + (b') \nu + (c') \zeta + \dots &= 0, \\ &\dots \dots \dots \\ T \{ (A) \xi + (B) \nu + (C) \zeta + \dots \}^\mu &= 0, \end{aligned}$$

wo in der letzten Gleichung T irgend eine Combination $(m - \mu)^{\text{ten}}$ Grades der Grössen $(A), (B), \dots (G), (H), \dots$ bezeichnet. Die Resultante dieses Systemes ist

$$U = T \begin{vmatrix} (A) \cdot (B) \cdot (C) \dots \\ (a) \cdot (b) \cdot (c) \dots \\ (a') \cdot (b') \cdot (c') \dots \\ \dots \end{vmatrix}^\mu = T \cdot \Delta^{(\nu-1)\mu} \begin{vmatrix} g_1 \cdot h_1 \dots \\ g_{\nu} \cdot h_{\nu} \dots \\ \dots \end{vmatrix}^\mu = \frac{T}{m} u^{(\nu-1)\mu} \begin{vmatrix} g_1 \cdot h_1 \dots \\ g_{\nu} \cdot h_{\nu} \dots \\ \dots \end{vmatrix}.$$

Hier findet wirklich höhere Theilbarkeit Statt. Denn nach dem allgemeinen Satze in §. 13 wäre bloss eine Theilbarkeit durch $u^{(\nu-2)\mu+1}$ zu erwarten. Bezeichnet σ den Grad von U in Beziehung auf ihre expliciten Elemente, so ist $\sigma = (\nu - 1) \mu + 1$, also U durch $u^{\sigma-1}$ theilbar, anstatt bloss durch $u^{\sigma-\mu}$.

Stimmt das secundäre System genau mit dem ursprünglichen überein, indem $\nu = n, \mu = m$ wird, so ist

$$U = \left(\frac{u}{m} \right)^{(n-1)m}.$$

§. 17. Besteht das ursprüngliche System aus den abgeleiteten Gleichungen eines Polynoms $f(x, y, z, \dots)$ mit n Variablen und vom m^{ten} Grade, und werden die Differential-Coëfficienten von u , multiplicirt mit den betreffenden Permutationszahlen, für die einfachen Elemente in der Function u substituiert, so ist nach §. 13 das Ergebniss U durch die $(n - 1) (m - 1)^{n-1}$ Potenz von u theilbar. Wir wollen im Folgenden die drei besonderen Fälle, wo $n = 2, m = 3$, wo $n = 2, m = 4$, und endlich wo $n = 3, m = 3$ ist, in Beziehung auf höhere Theilbarkeit untersuchen.

I. Das ursprüngliche Polynom sei $ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$. Seine Resultante ist $u = 4(bd - c^2)(ac - b^2) - (bc - ad)^2$. Setzen wir der Kürze wegen $bd - c^2 = \alpha, bc - ad = \beta, ac - b^2 = \gamma$, so dass $u = 4\alpha\gamma - \beta^2$ wird, so haben wir

$$\frac{1}{2} \frac{du}{da} = A = 2c\alpha + d\beta, \quad \frac{1}{6} \frac{du}{db} = B = d\gamma - b\alpha, \quad \frac{1}{6} \frac{du}{dc} = C = a\alpha - c\gamma, \quad \frac{1}{2} \frac{du}{dd} = D = 2b\gamma + a\beta,$$

und hieraus nach einigen Reductionen

$$BD - C^2 = \gamma u, \quad BC - AD = -\beta u, \quad AC - B^2 = \alpha u.$$

Also hat das secundäre Polynom

$$\frac{du}{da} x^3 + \frac{du}{db} x^2 y + \frac{du}{dc} x y^2 + \frac{du}{dd} y^3$$

die Resultante

$$U = 16u^3.$$

Die allgemeine Regel gibt bloss den Divisor u^2 . Es findet also in diesem Falle eine höhere Theilbarkeit statt.

Diese Formel wird von Cayley in Crelle XXIX, S. 54, erwähnt und Eisenstein zugeschrieben.

II. Das ursprüngliche Polynom sei

$$ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4.$$

Die Resultante u desselben ist von Cayley (Crelle XXX, S. 19) in einer sehr merkwürdigen Form gegeben worden. Ich gelange auf folgendem Wege dazu. Eliminirt man aus den abgeleiteten Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 &= 0, \\ bx^3 + 3cx^2y + 3dxy^2 + ey^3 &= 0 \end{aligned} \right\} (1)$$

resp. x^3 und y^3 , so erhält man

$$\begin{aligned} 3(ac - b^2)x^2 + (ae - bd)y^2 &= -3(ad - bc)yz, \\ (ae - bd)x^2 + 3(ce - d^2)y^2 &= -3(be - cd)yz. \end{aligned}$$

Multipliziert man diese zwei Gleichungen mit einander und beachtet die identische Relation

$$(ac - b^2)(ce - d^2) - (ad - bc)(be - cd) + (ae - bd)(bd - c^2) = 0,$$

so findet man die resultirende Gleichung durch $ae - bd$ theilbar und bekommt:

$$3(ac - b^2)x^4 + (ae - bd)x^2y^2 + 3(ce - d^2)y^4 = 9(bd - c^2)x^2y^2$$

oder

$$3c(ax^4 + 2cx^2y^2 + ey^4) - 3(bx^4 + dy^4) + (ae - 4bd + 3c^2)x^2y^2 = 0.$$

Da nun

$$ax^4 + 2cx^2y^2 + ey^4 = -4xy(bx^2 + cxy + dy^2)$$

ist, so folgt

$$-(bx^2 + 2cxy + dy^2)^2 + \frac{1}{3}(ae - 4bd + 3c^2)x^2y^2 = 0,$$

und, wenn man

$$ae - 4bd + 3c^2 = 3\rho^2$$

setzt und die Gleichung in Factoren zerlegt,

$$bx^2 + (2c - \rho)xy + dy^2 = 0.$$

Combinirt man diese Gleichung mit den Gleichungen (1), so erhält man leicht das System

$$\begin{aligned} ax^2 + 2bxy + (c + \rho)y^2 &= 0, \\ bx^2 + (2c - \rho)xy + dy^2 &= 0, \\ (c + \rho)x^2 + 2dxy + ey^2 &= 0, \end{aligned}$$

und indem man hier x^2 , $2xy$, y^2 wie unabhängige Grössen behandelt und eliminirt,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix} - \rho^3 = 0.$$

Macht man diese Gleichung rational, so erhält man die gesuchte Resultante

$$u = 27 \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix}^2 - (ae - 4bd + 3c^2)^3.$$

Um abzukürzen, setzen wir

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix}, \text{ die reciproken Elemente } \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \varsigma & \delta \\ \gamma & \delta & \varepsilon \end{matrix},$$

$$J = \varsigma - 4\gamma = ae - 4bd + 3c^2.$$

Werden nun $\frac{du}{da}$, $\frac{1}{4}\frac{du}{db}$, $\frac{1}{6}\frac{du}{dc}$, $\frac{1}{4}\frac{du}{dd}$, $\frac{du}{de}$ mit 3 dividirt, so erhält man folgendes Schema

$$\begin{array}{rcl} 18\alpha\Delta - eJ^2 & 9\beta\Delta + dJ^2 & (6\gamma + 3\varsigma)\Delta - cJ^2 \\ 9\beta\Delta + dJ^2 & (6\gamma + 3\varsigma)\Delta - cJ^2 & 9\delta\Delta + bJ^2 \\ (6\gamma + 3\varsigma)\Delta - cJ^2 & 9\delta\Delta + bJ^2 & 18\varepsilon\Delta - aJ^2 \end{array}$$

Die reciproken Elemente sind mit Weglassung des Factors u :

$$\begin{array}{rcl} 3\alpha\Delta - \varepsilon J & 6b\Delta + \delta J & 3c\Delta - \gamma J \\ 6b\Delta + \delta J & 12c\Delta - \varsigma J & 6d\Delta + \beta J \\ 3c\Delta - \gamma J & 6d\Delta + \beta J & 3e\Delta - \alpha J \end{array}$$

Die Determinante des ersten Schemas ist $2u^2\Delta$, die mit $\varsigma - 4\gamma$ analoge Grösse ist $-uJ^2$. Wenn man nun wieder den weggelassenen Factor 3 hinzunimmt, so erhält man durch Substitution von $\frac{du}{da}$, $\frac{1}{4}\frac{du}{db}$, ... anstatt $a, b, \dots$ in der Function u , als Resultante des secundären Systemes

$$U = 729u^3(108u\Delta^2 + J^6) = 729u^3(54\Delta^2 - J^3)^2.$$

Der Satz in §. 13 gibt aber auch schon eine Theilbarkeit durch u^3 . Wir sehen nur noch, dass der Quotient ein Quadrat ist und sich bloss mittelst Δ und J ausdrücken lässt.

III. Wir wollen endlich den Fall eines kubischen Polynoms mit drei Variabeln betrachten. Durch lineare Substitutionen kann dasselbe im Allgemeinen auf die Form

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3\alpha xyz$$

gebracht werden. Die abgeleiteten Gleichungen sind

$$x^2 - \alpha yz = 0, \quad y^2 - \alpha xz = 0, \quad z^2 - \alpha xy = 0.$$

Die vier Wurzelgruppen des Systemes der beiden letzten sind $1:0:0$, $1:\alpha:\alpha$, $1:i\alpha:i^2\alpha$, $1:i^2\alpha:i\alpha$, wo i, i^2 die imaginären Kubikwurzeln der positiven Einheit bezeichnen. Werden nun im ersten abgeleiteten Polynom die Wurzeln dieser vier Gruppen substituirt, so gibt die erste Substitution 1, und jede der drei folgenden $1 - \alpha^3$. Folglich ist die Resultante $(1 - \alpha^3)^3$.

Jetzt sei $f(x, y, z)$ ein vollständiges kubisches Polynom mit litteralen Elementen. Seine Resultante u wird in Beziehung auf diese vom 12. Grade sein. Es sei ferner

$$\left. \begin{array}{l} x' = \lambda x + \mu y + \nu z \\ y' = \lambda' x + \mu' y + \nu' z \\ z' = \lambda'' x + \mu'' y + \nu'' z \end{array} \right\} (1)$$

$$x'^3 + y'^3 + z'^3 - 3\alpha x'y'z' = f(x, y, z),$$

und Δ die Determinante der Elemente der linearen Substitutionen. Dann ist nach §. 9

$$u = \Delta^{12} (1 - \alpha^3)^3. \quad (2)$$

Sind $l, m, n, l', \dots$ die reciproken Elemente von Δ , so ist $\Delta x = lx' + my' + nz'$, etc.

$$f(l, m, n) = f(l', m', n') = f(l'', m'', n'') = \Delta^3, \quad (3)$$

und wenn die beiden Ableitungen, wo die Differentiale von l, m, n resp. durch l', m', n' und l'', m'', n'' ersetzt werden, durch die Symbole δ', δ'' angezeigt werden:

$$6Q = \delta' \delta'' f(l, m, n) = -3\alpha \Delta^3. \quad (4)$$

Differentiirt man das System der Gleichung (1) wiederholt nach den einzelnen Variablen x, y, z , so wird man die Differential-Coëfficienten in Function von x', y', z' erhalten. Unterscheidet man dieselben durch die als Zeiger untergesetzten Variablen, und ersetzt x, y, z, x', y', z' gleichzeitig durch $l, m, n, \Delta, o, \sigma$, so erhält man

$${}^{1/3}f_x(l, m, n) = \lambda \Delta^2, \text{ etc.} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} {}^{1/3}f_{xx}(l, m, n) &= (2\lambda^2 - 2\alpha\lambda'\lambda'') \Delta, \\ {}^{1/3}f_{xy}(l, m, n) &= (2\lambda\mu - \alpha(\lambda'\mu'' + \lambda''\mu')) \Delta, \\ {}^{1/3}f_{xz}(l, m, n) &= (2\lambda\nu - \alpha(\lambda'\nu'' + \lambda''\nu')) \Delta. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Wir wollen nun die Gleichungen (3) und (4) in Beziehung auf die zehn unter sich unabhängigen Elemente des Polynoms f vollständig differentiiren, indem wir $\alpha, \lambda, \mu, \dots$ als ebenso viele Functionen derselben betrachten. Sind in einem Ausdruck jene unabhängigen Elemente explicite vorhanden, so soll die nur auf sie bezügliche Differentiation mit D , die nur auf die Functionen bezügliche mit ∂ , endlich die vollständige Differentiation mit d bezeichnet werden (also $d = D + \partial$). Werden endlich die Differentiale der ursprünglichen Elemente, wie es das Bildungsgesetz des secundären Polynoms erfordert, durch die entsprechenden mit ihren Permutationszahlen multiplicirten Combinationen der neuen Variablen ξ, υ, ζ ersetzt, so mögen für diese ableitende Operation die vorigen Zeichen ebenfalls gelten.

Setzen wir nun, um abzukürzen,

$$\rho = l\xi + m\upsilon + n\zeta, \quad \rho' = l'\xi + m'\upsilon + n'\zeta, \quad \rho'' = l''\xi + m''\upsilon + n''\zeta,$$

so ist

$$Df(l, m, n) = \rho^3, \text{ etc.}, \quad DQ = \rho\rho'\rho''$$

Ferner ist nach (5)

$$\partial f(l, m, n) = 3\Delta^2 (\lambda dl + \mu dm + \nu dn),$$

oder, da

$$d\Delta = l d\lambda + m d\mu + n d\nu + \lambda dl + \mu dm + \nu dn$$

ist,

$$\partial f(l, m, n) = d \cdot \Delta^3 - 3\Delta^2 (l d\lambda + m d\mu + n d\nu).$$

Wenn aber die erste der Gleichungen (3) vollständig differentiirt wird, so haben wir

$$d \cdot \Delta^3 = \rho^3 + \partial f(l, m, n).$$

Folglich ist

$$\left. \begin{aligned} 3\Delta^2 (l d\lambda + m d\mu + n d\nu) &= \rho^3, \\ 3\Delta^2 (l' d\lambda' + m' d\mu' + n' d\nu') &= \rho'^3, \\ 3\Delta^2 (l'' d\lambda'' + m'' d\mu'' + n'' d\nu'') &= \rho''^3. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Durch Addition aller drei Gleichungen ergibt sich

$$3\Delta^2 d\Delta = d \cdot \Delta^3 = \rho^3 + \rho'^3 + \rho''^3. \quad (8)$$

Bezeichnen wir eine Differentiation, die sich nur auf l', m'', n'' erstreckt, mit δ'' , und enthält das Object der Operation δ'' die Grössen l', m'', n'' nicht, so ist

$$\delta'' \delta'' = d l'' \frac{\partial}{\partial l} + d m'' \frac{\partial}{\partial m} + d n'' \frac{\partial}{\partial n},$$

also

$$6 \delta'' Q = (d l'' \cdot \delta' f_x + d m'' \cdot \delta' f_y + d n'' \cdot \delta' f_z) (l, m, n).$$

Um hier die rechte Seite zu reduciren, müssen wir die Gleichungen (6) mit l', m', n' multipliciren und addiren. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \delta' f_x(l, m, n) &= -3 \alpha \lambda'' \Delta^2, \\ \delta' f_y(l, m, n) &= -3 \alpha \mu'' \Delta^2, \\ \delta' f_z(l, m, n) &= -3 \alpha \nu'' \Delta^2. \end{aligned}$$

Also ist

$$6 \delta'' Q = -3 \alpha \Delta^2 (\lambda'' d l'' + \mu'' d m'' + \nu'' d n'') = -\alpha (\rho^3 + \rho'^3)$$

wegen (7). Da Q durch Vertauschung von Accenten nicht geändert wird, so ist ebenso

$$6 \delta Q = -\alpha (\rho^3 + \rho'^3), \quad 6 \delta' Q = -\alpha (\rho^3 + \rho''^3);$$

aber $\partial = \delta + \delta' + \delta''$; also endlich

$$\begin{aligned} 6 \partial Q &= -2 \alpha (\rho^3 + \rho'^3 + \rho''^3), \\ 6 d Q &= 6 \rho \rho' \rho'' - 2 \alpha (\rho^3 + \rho'^3 + \rho''^3). \end{aligned}$$

Die Gleichung (4) gibt also jetzt mit Beziehung von (8)

$$\Delta^3 d \alpha = -2 \rho \rho' \rho'' - \frac{1}{3} \alpha (\rho^3 + \rho'^3 + \rho''^3).$$

Durch diese Formel und (8) sind wir endlich in Stand gesetzt, die Gleichung (2) vollständig zu differenziren. Es ergibt sich

$$d u = \Delta^9 (1 - \alpha^3)^2 \{ (4 - \alpha^3) (\rho^3 + \rho'^3 + \rho''^3) + 18 \alpha^2 \rho \rho' \rho'' \}.$$

Da das secundäre Polynom auf der rechten Seite in der bekannten reducirten Form erscheint, so können wir mittelst des §. 9 seine Resultante U ohne Mühe angeben. Es ist

$$\begin{aligned} U &= u^8 \cdot \Delta^{36} (4 - \alpha^3)^3 \{ (4 - \alpha^3)^3 + 216 \alpha^6 \}^3 \\ &= u^8 \cdot \Delta^{36} \{ (4 - \alpha^3) (4 - \varepsilon^3 \alpha^3) (4 - \varepsilon'^3 \alpha^3) (4 - \varepsilon''^3 \alpha^3) \}^3, \end{aligned}$$

wo die Wurzeln der Gleichung $(x+1)^3 - 2 = 0$ durch $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ bezeichnet sind. Es gibt also keine höhere Theilbarkeit, als bereits aus §. 13 folgt.

§. 18. Cayley in seinem *Mémoire sur les Hyperdeterminants* (Crelle XXX, S. 1) betrachtet Polynome Φ von der Form $a x_1 x_2 + b x_1 y_2 + c y_1 x_2 + d y_1 y_2$, die in Beziehung auf alle n Variablen einer jeden der m Gruppen $x_1, y_1, \dots, w_1; x_2, y_2, \dots, w_2; \dots; x_m, y_m, \dots, w_m$ homogen und linear sind, und spricht unter anderm auch von der Resultante U aller abgeleiteten Gleichungen eines solchen Polynoms. Es ist klar, dass, wenn immer die gleichnamigen Variablen aller Gruppen einander gleich gesetzt, und daher die unterscheidenden Zeiger weggelassen werden, das Polynom Φ in ein gewöhnliches vollständiges homogenes Polynom $f(x, y, \dots, w)$ vom m^{ten} Grade übergeht. Es ist ferner klar, dass, wenn in Φ die Coefficienten aller Variabelnproducte, die sich nur durch Permutation der auf die m verschiedenen Variabelngruppen bezüglichen Zeiger unterscheiden, einander gleich gesetzt werden, dann alle auf gleichnamige Variablen bezüglichen Differential-Coëfficienten, wie $\frac{d\Phi}{dx_1}, \frac{d\Phi}{dx_2}, \dots, \frac{d\Phi}{dx_m}$, in einen und denselben $\frac{1}{m} \frac{df}{dx}$ übergehen. Die früheren mn abgeleiteten Gleichungen werden dann auf die n Gleichungen

$$\frac{1}{m} \frac{df}{dx} = 0, \quad \frac{1}{m} \frac{df}{dy} = 0, \quad \dots \quad \frac{1}{m} \frac{df}{dw} = 0$$

zurückkommen; und wenn die Resultante u dieser letztern verschwindet, so wird auch gleichzeitig die durch die obigen Annahmen modificirte Resultante U verschwinden müssen. D. h., wenn in U immer alle Elemente, die sich nur durch die auf die m Variabelngruppen bezüglichen Zeiger unterscheiden, einander gleichgesetzt werden — der von Cayley sogenannte symmetrische Fall — so wird u als Factor von U erscheinen.

Nun scheint aber Cayley auf S. 18 vorauszusetzen, dass die dem allgemeinen Fall entsprechende Resultante U durch die den symmetrischen Fall bewirkenden Annahmen auch geradezu in die diesem Falle entsprechende Resultante u übergeführt werde, mit anderen Worten, dass U und u in Beziehung auf ihre Elemente von demselben Grade seien. Dies ist aber namentlich in dem dort betrachteten Falle, wo $n = 2$, $m = 4$ ist, keineswegs richtig. Sondern U und u sind dann resp. vom 24. und 6. Grade, wie sich aus der nun folgenden allgemeinen Untersuchung ergeben wird.

Wir sehen zuerst im ursprünglichen Polynome Φ die Variablen $x_1, y_1, \dots, w_1$ der ersten Gruppe als constant an. Sein Grad ist dann nur $m-1$, und seine Coëfficienten sind lineare Functionen von $x_1, y_1, \dots, w_1$. Die Resultante der $(m-1) n$ Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Phi}{dx_2} = 0, \frac{d\Phi}{dy_2} = 0, \dots, \frac{d\Phi}{dw_2} = 0, \\ \text{etc.} \\ \frac{d\Phi}{dx_m} = 0, \frac{d\Phi}{dy_m} = 0, \dots, \frac{d\Phi}{dw_m} = 0, \end{aligned} \right\} (1)$$

sei V und in Beziehung auf ihre Elemente vom Grade p . Ist dann die Gleichung $V = 0$ erfüllt, so sind die in Beziehung auf die Elemente genommenen Differential-Coëfficienten von V mit den betreffenden Variablen-Producten in Φ proportional. Betrachten wir nun wiederum diese Elemente als lineare Functionen der Variablen $x_1, y_1, \dots, w_1$ und ersetzen in den in Beziehung auf diese Variablen der ersten Schichte abgeleiteten Functionen von Φ die Producte der übrigen Variablen durch jene mit ihnen proportionalen Differential-Coëfficienten von V , so ergibt sich offenbar

$$\frac{d\Phi}{dx_1} : \frac{d\Phi}{dy_1} : \dots : \frac{d\Phi}{dw_1} = \frac{dV}{dx_1} : \frac{dV}{dy_1} : \dots : \frac{dV}{dw_1},$$

wenn anders das System der Gleichungen (1) erfüllt ist. Wenn nun jenem Systeme noch die Gleichungen

$$\frac{d\Phi}{dx_1} = 0, \frac{d\Phi}{dy_1} = 0, \dots, \frac{d\Phi}{dw_1} = 0$$

zugesezt werden, so kömmt das System aller mn abgeleiteten Gleichungen auf dasjenige der n Gleichungen

$$\frac{dV}{dx_1} = 0, \frac{dV}{dy_1} = 0, \dots, \frac{dV}{dw_1} = 0$$

zurück. Die Resultante U dieser Gleichungen ist in Beziehung auf die zusammengesetzten Factoren, mit denen die Combinationen der Variablen $x_1, y_1, \dots, w_1$ im Polynome V multiplicirt sind, vom Grade $n(p-1)^{n-1}$, und da jene Factoren in Beziehung auf die einfachen Elemente von Φ vom p^{ten} Grade sind, so ist U in Beziehung auf diese vom Grade $np(p-1)^{n-1}$. Wir müssen indessen aus sogleich anzubringenden Gründen daran zweifeln, dass die so bestimmte Function U wirklich ganz im Allgemeinen die echte Resultante des vielschichtig linearen Polynoms Φ sei. Nur für $n = 2$, $m = 4$ sind wir sicher, dass das beschriebene Verfahren zur Kenntniss der echten Resultante führt.

Bezeichnen wir den Grad der nach dem obigen Verfahren bestimmten Function U , welcher m Schichten von n Variablen entspricht, mit $f(m)$, so bekommen wir die Recursions-Gleichung

$$f(m) = n \cdot f(m-1) \cdot [f(m-1)-1]^{n-1}.$$

Nehmen wir jetzt zuerst $m=2$ an, und setzen

$$\begin{aligned}\Phi = & (1,1)x_1x_2 + (1,2)x_1y_2 + \dots + (1,n)x_1w_2 \\ & + (2,1)y_1x_2 + (2,2)y_1y_2 + \dots + (2,n)y_1w_2 \\ & \vdots \\ & + (n,1)w_1x_2 + (n,2)w_1y_2 + \dots + (n,n)w_1w_2,\end{aligned}$$

so werden die $2n$ abgeleiteten Gleichungen

$$\begin{array}{l|l}(1,1)x_2 + (1,2)y_2 + \dots + (1,n)w_2 = 0, & (1,1)x_1 + (2,1)y_1 + \dots + (n,1)w_1 = 0, \\ (2,1)x_2 + (2,2)y_2 + \dots + (2,n)w_2 = 0, & (1,2)x_1 + (2,2)y_1 + \dots + (n,2)w_1 = 0, \\ \vdots & \vdots \\ (n,1)x_2 + (n,2)y_2 + \dots + (n,n)w_2 = 0, & (1,n)x_1 + (2,n)y_1 + \dots + (n,n)w_1 = 0;\end{array}$$

und von beiden Gruppen von je n Gleichungen gibt jede dieselbe Resultante, die Determinante aller nn Elemente des ursprünglichen Polynoms Φ . Wir haben also

$$\begin{aligned}f(2) &= n, \\ f(3) &= n^2(n-1)^{n-1}, \\ f(4) &= n^3(n-1)^{n-1}(n^2(n-1)^{n-1}-1)^{n-1}, \\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

Setzen wir $n=2$, so bekommen wir

$$f(2)=2, f(3)=4, f(4)=24, f(5)=1104, f(6)=2435424, \text{ etc.}$$

Wenn n sehr gross ist, so ist annähernd

$$f(m) = n^{n^{m-2}}.$$

Für ein vollständiges Polynom m^{ten} Grades mit mn Variablen ist der Grad der Resultante aller seiner abgeleiteten Gleichungen

$$mn(m-1)^{m-1}.$$

Für $m \geq 3$ wird diese Zahl beim steten Wachsen von n sehr bald von der vorhin für $f(m)$ näherungsweise angegebenen Zahl weit übertroffen. Setzen wir z. B. $m=3$, $n=10$, so ist der Grad der Resultante der aus einem vollständigen Polynom dritten Grades mit dreissig Variablen abgeleiteten Gleichungen

$$30 \cdot 2^9 = 16106127360.$$

Dagegen ist für ein dreischichtig lineares Polynom Φ mit je zehn Variablen in jeder Schichte der Grad der durch obiges Verfahren gefundenen Function U

$$100 \cdot 9^9 = 38742048900.$$

In der Function U ist also die wahre Resultante noch mit einem fremden Factor multiplicirt. Denn die specielle Beschaffenheit des Polynoms Φ , vermöge welcher sehr viele Coëfficienten des vollständigen Polynoms vom selben Grade und von derselben Anzahl von Variablen als Null geworden anzusehen sind, kann den für dieses letztere Statt findenden Grad der Resultante nicht erhöhen, sondern wird ihn, wenn eine Aenderung geschieht, weit eher erniedrigen. So einfach daher auch das obige Verfahren scheinen mag, und so schwer es auch ist, den fremden Factor anzugeben, der durch dasselbe eingeführt wird, so ist doch sicher, dass es uns im Allgemeinen nicht zur Kenntniss der echten Resultante eines vielschichtig linearen Polynoms führen kann.

§. 19. Besondere Betrachtung des Falles, wo $m=4$, $n=2$ ist.

Es sei zuerst das zweischichtig lineare Polynom $ax_1x_2 + by_1x_2 + cx_1y_2 + dy_1y_2$ gegeben, so ist auf der Stelle klar, dass seine Resultante $ad - bc$ ist.

Ersetzen wir jetzt dieses Polynom durch das dreischichtige

$$\left\{ \begin{array}{l} ax_3 | x_2 + cx_3 | y_2 \\ + ey_3 | \quad + gy_3 | \end{array} \right\} x_1 + \left\{ \begin{array}{l} bx_3 | x_2 + dx_3 | y_2 \\ + fy_3 | \quad + hy_3 | \end{array} \right\} x_2,$$

so geht die vorige Resultante in

$$(ad - bc)x_3^2 + (ah + de - bg - cf)x_3y_3 + (eh - fg)y_3^2$$

über, und die Resultante

$$4(ad - bc)(eh - fg) - (ah + de - bg - cf)^2 = 8$$

dieses quadratischen Polynoms wird zugleich die gesuchte Resultante jenes dreischichtigen Polynoms sein.

Wir kommen endlich zu dem vierschichtig linearen Polynom

$$\Phi = \left\{ \begin{array}{l} (ax_4 + iy_4)x_3 | x_2 + (cx_4 + ky_4)x_3 | y_2 \\ + (ex_4 + my_4)y_3 | \quad + (gx_4 + oy_4)y_3 | \end{array} \right\} x_1 + \left\{ \begin{array}{l} (bx_4 + jy_4)x_3 | x_2 + (dx_4 + ly_4)x_3 | y_2 \\ + (fx_4 + ny_4)y_3 | \quad + (hx_4 + py_4)y_3 | \end{array} \right\} y_1,$$

dem diese Betrachtung gewidmet ist. Bezeichnen wir nun diejenige ableitende Operation, wo nur nach den auf x_4 bezüglichen Elementen

$$a, b, c, d, e, f, g, h$$

differentiirt, und ihre Differentiale resp. durch die auf y_4 bezüglichen Elemente

$$i, j, k, l, m, n, o, p$$

ersetzt werden, mit D , so geht die vorige Resultante 8 in das biquadratische Polynom

$$8x_4^4 + D8 \cdot x_4^3y_4 + \frac{1}{2}D^28 \cdot x_4^2y_4^2 + \frac{1}{6}D^38 \cdot x_4y_4^3 + \frac{1}{24}D^48 \cdot y_4^4$$

über, und seine Resultante U wird entweder die Resultante von Φ selbst sein oder diese als Factor enthalten. Wendet man die in §. 17, II gegebene Formel hier an, so erhält man

$$U = Q^2 - 4R^3,$$

wo

$$Q = \begin{vmatrix} 68 \cdot 3D8 \cdot D^28 \\ 3D8 \cdot 2D^28 \cdot D^38 \\ D^28 \cdot D^38 \cdot D^48 \end{vmatrix} = 128 \cdot D^28 \cdot D^48 + 6D8 \cdot D^28 \cdot D^38 - 68 \cdot (D^38)^2 - 2(D^28)^3 - 9(D8)^2 \cdot D^48,$$

$$R = 28 \cdot D^48 - 2D8 \cdot D^38 + (D^28)^2$$

ist. Da $D^58 = 0$ ist, so überzeugt man sich leicht, dass $DQ = 0$, $DR = 0$ ist.

§. 20. Für die fernere Rechnung bedürfen wir folgender Hülfsätze:

a) Wenn D eine ableitende Operation bezeichnet, wo irgend eine homogene und ganze Function der n einfachen Elemente $a, b, c, d, \dots$ oder der n einfachen Elemente $e, f, g, h, \dots$ in Beziehung auf diese differentiirt wird, und dann ihre Differentiale durch beliebige constante Grössen $a', b', c', d', \dots, e', f', g', h', \dots$ resp. ersetzt werden, so ist

$\sum_{m=0}^{m=n} (-1)^m D^m (abcd \dots) \times D^{n-m} (efgh \dots) = \Sigma (ae' - a'e)(bf' - b'f)(cg' - c'g) \dots [n \text{ Factoren}]$,
wo die Summe rechts sich auf alle Permutationen der n Buchstaben $e, f, g, h, \dots$ erstreckt.

Beweis. Versieht man im Product $abcd \dots$ auf alle möglichen Arten je m Factoren mit Accenten und multiplicirt das Aggregat mit $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m$, so hat man $D^m(abcd \dots)$. Dasselbe gilt von $D^{n-m}(efgh \dots)$. Wir erhalten so eine Vorstellung von der entwickelten linken Seite. Denken wir uns nun auch rechts die Entwicklung des unter das Summenzeichen gesetzten Productes, so werden darin Glieder vorkommen, wo je m der Grössen $a, b, c, d, \dots$ accentuirt und die übrigen $n-m$ nicht accentuirt sind. Jede der accentuirten bringt ein Minuszeichen mit sich. Das Vorzeichen wird also $(-1)^m$. Sind ferner z. B. a', b' accentuirt, so nehmen sie die nicht accentuirten e, f als Factoren mit, während die übrigen nicht accentuirten $c, d, \dots$ die accentuirten $g', h', \dots$ als Factoren mitnehmen. Nun sind $e, f, g', h', \dots$ vollständig zu permutiren, so werden je $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-m)$ gleiche Producte entstehen (wenn nämlich das Schema der m Nichtaccente und der $n-m$ Accente fest steht, und nur die darunter fallenden Buchstaben $e, f, g, h, \dots$ permutirt werden). Man hat also das Glied

$$(-1)^m 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m \times 1 \cdot 2 \dots (n-m) \times a' b' c d \dots \times \Sigma e f g' h' \dots,$$

wo das Summenzeichen Σ sich auf die Permutation der blossen Buchstaben $e, f, g, h, \dots$ bezieht. Vereinigt man alle ähnlichen Glieder, wo je m von den Grössen $a, b, c, d, \dots$ accentuirt sind, so erhält man

$$(-1)^m 1 \cdot 2 \dots m \times \Sigma a' b' c d \dots \times 1 \cdot 2 \dots (n-m) \times \Sigma e f g' h' \dots,$$

gerade wie auf der linken Seite. Die aufgestellte Gleichung ist also identisch.

Bemerkung. Wenn n grösser ist als 2, so geben auf der rechten Seite alle positiven Permutationen dasselbe Resultat wie alle negativen für sich. Man braucht daher auf der rechten Seite das Summenzeichen nur auf alle positiven Permutationen auszudehnen, wenn man gleichzeitig die linke Seite halbt.

Denn der Unterschied zwischen dem den positiven und dem den negativen Permutationen entsprechenden Aggregat ist offenbar

$$\begin{vmatrix} ae - a'e & af - a'f & ag - a'g & \dots \\ be - b'e & bf - b'f & bg - b'g & \dots \\ ce - c'e & cf - c'f & cg - c'g & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cdot b \cdot c \cdot \dots & e' & f' & g' \cdot \dots \\ a' \cdot b' \cdot c' \cdot \dots & -e & -f & -g \cdot \dots \end{vmatrix} = 0.$$

Da die Operation D distributiver Natur ist, so ist leicht einzusehen, was entstehen wird, wenn die Monome $abcd \dots, efgh \dots$ durch Polynome n^{ten} Grades ersetzt werden. Wenn M, N zwei solche Polynome bezeichnen, so wollen wir fortan der Kürze wegen

$$(M, N) = \sum_{m=0}^{m=n} (-1)^m D^m M \cdot D^{n-m} N$$

setzen.

b) Wenn D eine ableitende Operation bezeichnet, wo die Differentiale der Variablen a, b, c, d, e, f in die Constanten a', b', c', d', e', f' umgesetzt werden, so ist

$$(ab, cd, ef) = \begin{vmatrix} ab \cdot Dab \cdot D^2 ab \\ cd \cdot Dcd \cdot D^2 cd \\ ef \cdot Def \cdot D^2 ef \end{vmatrix} = -2\{(cf' - c'f)(eb' - e'b)(ad' - a'd) + (de' - d'e)(fa' - f'a)(bc' - b'c)\},$$

im Ganzen vier identische Formen, von denen die drei übrigen sich durch Permutation beider Factoren je eines der Producte ab, cd, ef ergeben. Durch die Entwicklung beider Seiten dieser Formel wird man sich von ihrer Identität überzeugen.

Da die Operation D distributiver Natur ist, so können die genannten Producte auch durch homogene quadratische Functionen der Variablen ersetzt werden. Wie dann die Formel sich weiter gestalten wird,

ist leicht abzusehen. Wir werden das abkürzende Zeichen (A, B, C) auch in dieser allgemeinen Bedeutung anwenden.

c) Wenn A, B, C, E homogene Functionen zweiten Grades der ursprünglichen Variabeln bezeichnen, so ist

$$(AB, CE) = 3(A, C) \cdot (B, E) + 3(A, E) \cdot (B, C) - 2(A, B) \cdot (C, E).$$

(Die Bedeutung der hier gebrauchten Zeichen ist wie in Satz (a). Das dortige n richtet sich immer nach dem Grade der Functionen. So ist z. B.

$$(AB, CE) = AB \cdot D^4 CE - DAB \cdot D^3 CE + D^2 AB \cdot D^2 CE - D^3 AB \cdot DCE + D^4 AB \cdot CE,$$

dagegen

$$(A, B) = A \cdot D^2 B - DA \cdot DB + D^2 A \cdot B.)$$

Man braucht nur links und rechts zu entwickeln, um die Identität beider Seiten dieser Gleichung einzusehen.

d) Wir wollen ferner, wenn A, B, C homogene Functionen vierten Grades bedeuten, der Kürze wegen

$$\{A, B, C\} = 2 \sum A \cdot \delta^2 B \cdot \delta^2 C - 3 \sum \delta A \cdot \delta B \cdot \delta^2 C - 2 \sum A \cdot \delta^3 B \cdot \delta^2 C + \sum \delta A \cdot \delta^2 B \cdot \delta^3 C - 2 \delta^2 A \cdot \delta^2 B \cdot \delta^2 C$$

setzen, wo die Summenzeichen sich auf die Permutationen der Potenzen des Ableitungs-Symboles δ beziehen. Man wird sich leicht überzeugen, dass

$$\delta(A, B, C) = 0$$

ist.

Sind nun a, b, c, d, e, f homogene quadratische Functionen der Variabeln, und werden die Producte ab, cd, ef an die Stelle der vorigen A, B, C gesetzt, so ist

$$\{ab, cd, ef\} = 16(a, b)(c, d)(e, f) - 12 \sum (a, b)(c, e)(d, f) + 9 \sum (a, c)(b, e)(d, f).$$

Die erste Summe rechts zählt sechs, die zweite acht Glieder.

Durch Entwicklung wird man sich von der Identität beider Seiten dieser Gleichung überzeugen. Es kommen im Ganzen nur zehn verschiedene Typen von Gliedern vor, nämlich

$$abcd'e''f'', ab'cd'ef'', ab'cd'e''f'', ab'cd'e''f'', ab'cd'e''f'', \\ ab'cd'e''f'', ab'cd'e''f'', ab'cd'e''f'', ab'cd'e''f'', ab'cd'e''f'',$$

wo der Kürze wegen ein und zwei Accente für die Operationen δ, δ^2 gesetzt sind. Hat man für jeden dieser Typen an einem einzigen Gliede die Uebereinstimmung beider Seiten verificirt, so ist die Richtigkeit der Gleichung schon bewiesen.

Aus der allgemeinen Formel ergeben sich die besondern:

$$\{ab, cd, cd\} = 4(a, b)(c, d)^2 - 12(a, b)(c, c)(d, d) + 18(a, c)(b, c)(d, d) \\ + 18(a, d)(b, d)(c, c) - 6(c, d)(a, c)(b, d) - 6(c, d)(a, d)(b, c), \\ \{ab, ab, ab\} = -2(a, b)^3 + 18(a, a)(b, b)(a, b).$$

§. 21. Wir wollen nun diese Hülfsätze auf die Entwicklung der Ausdrücke Q und R in §. 19 anwenden. Setzen wir

$$ad - bc = q, ah + de - bg - cf = r, eh - fg = s,$$

so ist

$$s = 49s - r^2,$$

und wir bekommen, indem wir das in §. 20 (d) eingeführte Zeichen anwenden,

$$Q = \{s, s, s\} = 64\{qs, qs, qs\} - 48\{qs, qs, r^2\} + 12\{qs, r^2, r^2\} - \{r^2, r^2, r^2\},$$

und wenn nun der Kürze wegen

$$(q, q) = A, (r, r) = B, (s, s) = C, (r, s) = D, (s, q) = E, (q, r) = F$$

gesetzt wird, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \{qs, qs, qs\} &= 18ACE - 2E^3, \\ \{qs, qs, r^2\} &= -12ABC + 4BE^2 + 18AD^2 + 18CF^2 - 12DEF, \\ \{qs, r^2, r^2\} &= 24BDF - 8B^2E, \\ \{r^2, r^2, r^2\} &= 16B^3, \end{aligned}$$

und wenn man diese Werthe im Ausdrucke für Q substituirt, nach einigen Reductionen

$$\frac{1}{16}Q = 54 \begin{vmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{vmatrix} + 18(4E - B)(AC - DF + BE - E^2) + (4E - B)^3.$$

Bezeichnet jetzt δ die ableitende Operation der vierten Schichte, wo die Coëfficienten der mit x_4 behafteten Glieder in Φ als Variablen aufgefasst und ihre Differentiale durch die entsprechenden Coëfficienten der mit y_4 behafteten Glieder ersetzt werden, und schreibt man der Kürze wegen $\delta q = q'$, $\delta^2 q = 2q''$, etc., so ist

$$A = 4qq'' - q'q', \text{ etc. }, D = 2rs'' - r's' + 2r''s, \text{ etc.},$$

und man bekommt

$$\begin{vmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2q \cdot 2r \cdot 2s & q' \cdot r'' \cdot s'' \\ -q' \cdot -r' \cdot -s' & q' \cdot r' \cdot s' \\ 2q'' \cdot 2r'' \cdot 2s'' & q \cdot r \cdot s \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} q \cdot r \cdot s & q' \cdot r' \cdot s' \\ q' \cdot r' \cdot s' & q'' \cdot r'' \cdot s'' \end{vmatrix}^2 = 4\Delta^2,$$

wo das mittlere Schema die Determinante der Producten-Summen je zweier Vertical-Reihen aus den verschiedenen Hälften bezeichnet; ferner

$$4E - B = r'r' - 4q's' - 4rr'' + 8qs'' + 8q's = K,$$

$$\begin{aligned} AC - E^2 - (DF - BE) &= \begin{vmatrix} 2q \cdot 2s & q' \cdot s'' \\ -q' \cdot -s' & q' \cdot s' \\ 2q'' \cdot 2s'' & q \cdot s \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2q \cdot 2r & r'' \cdot s'' \\ -q' \cdot -r' & r' \cdot s' \\ 2q'' \cdot 2r'' & r \cdot s \end{vmatrix} \\ &= -4(r')^2 + 4(q')(s') + 4(r)(r'') - 2(q)(s'') - 2(q'')(s) = -H, \end{aligned}$$

wo die reciproken Elemente der Determinante $\Delta = \Sigma \pm qr's''$ durch Einklammerung von den entsprechenden einfachen Elementen unterschieden sind.

Man bemerke, dass die ähnlich gebildeten Ausdrücke H und K sich nicht ändern, wenn man auch im Schema von Δ durch eine Umdrehung um die Diagonale die horizontalen Reihen mit den verticalen vertauscht, d. h. wenn man in Φ die dritte und vierte Schichte mit einander vertauscht. Da q, r, s sich nicht ändern, wenn man die erste und zweite Schichte der Variablen in Φ vertauscht, so ist klar, dass die Functionen Δ, H, K sich nicht ändern, sowohl wenn man die erste Schichte mit der zweiten, als auch wenn man die dritte mit der vierten vertauscht. Wir haben nun

$$\frac{1}{16}Q = 216\Delta^2 - 18HK + K^3.$$

Gehen wir jetzt an die Berechnung der Function R , so haben wir zuerst

$$R = (s, s) = 16(qs, qs) - 8(qs, r^2) + (r^2, r^2),$$

und wenn wir die Formel §. 20 (c) anwenden,

$$(qs, qs) = 3AC + E^2, \quad (qs, r^2) = 6DF - 2BE, \quad (r^2, r^2) = 4B^2,$$

also

$$\frac{1}{4}R = 12AC + 4E^2 - 12DF + 4BE + B^2 = 12(AC - E^2 - DF + BE) + (4E - B)^2 = K^2 - 12H.$$

Substituieren wir endlich die für Q und R gefundenen Werthe in dem zu Ende von §. 19 gegebenen Ausdrucke für U , so bekommen wir

$$\frac{1}{256}U = (216\Delta^2 - 18HK + K^3)^2 - (K^2 - 12H)^3;$$

in der Entwicklung fallen die Glieder in K^6 und K^4H weg.

§. 22. Wir trachten die Resultante U bloss durch solche Functionen der ursprünglichen Elemente auszudrücken, welche sich nicht ändern, wenn man irgend zwei Schichten mit einander vertauscht. Um zu diesem Ziele zu gelangen, wenden wir jetzt den Satz §. 20 (b) auf die Function Δ an. Wir haben

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{2}(q, r, s) = \frac{1}{2}(ad - bc, ah + de - bg - cf, eh - fg) \\ &= \frac{1}{2}\{(ad, ah, eh) - (ad, ah, fg) + (ad, de, eh) - (ad, de, fg) \\ &\quad - (ad, bg, eh) + (ad, bg, fg) - (ad, cf, eh) + (ad, cf, fg) \\ &\quad - (bc, ah, eh) + (bc, ah, fg) - (bc, de, eh) + (bc, de, fg) \\ &\quad + (bc, bg, eh) - (bc, bg, fg) + (bc, cf, eh) - (bc, cf, fg)\}. \end{aligned}$$

Dieses Aggregat zerfällt in drei Gruppen, welche durch die Glieder

$$(I) \quad -\frac{1}{2}(ah, ad, eh), \quad (II) \quad -\frac{1}{2}(ah, bc, fg), \quad (III) \quad \frac{1}{2}(ah, ad, fg)$$

repräsentirt sind. Jede der beiden ersten Gruppen zählt vier Glieder, welche sich durch die mit einem Zeichenwechsel begleitete Vertauschung der beiden Variablen x, y je einer der drei ersten Schichten ergeben. Die dritte Gruppe zählt acht Glieder, von denen sich aus dem hingetzten drei fernere durch einmalige, drei durch doppelte und das letzte durch dreifache Vertauschung ergeben.

Wenden wir nun den genannten Satz (b) auf die typischen Glieder der drei Gruppen an, so haben wir für die erste Gruppe:

$$-\frac{1}{2}(ah, ad, eh) = (ah)(ae)(dh), \quad (I)$$

wo abkürzend $(ah) = a\delta h - h\delta a = ap - hi$, etc. gesetzt ist. Für die zweite Gruppe ist nach einer der vier Formeln

$$-\frac{1}{2}(ah, bc, fg) = (bg)(fh)(ac) + (cf)(ag)(bh),$$

oder, da

$$(ag)(bh) + (ab)(hg) + (ah)(gb) = 0$$

ist, auch

$$-\frac{1}{2}(ah, bc, fg) = (ah)(bg)(cf) + (ac)(fh)(bg) + (ab)(gh)(cf). \quad (II)$$

Für die dritte Gruppe endlich ist

$$\frac{1}{2}(ah, ad, fg) = -(af)(ag)(dh). \quad (III)$$

Nehmen wir nun Alles zusammen, so bekommen wir

$$\Delta = (de)(fc)(gb) + (ah)(fc)(gb) + (ah)(de)(gb) + (ah)(de)(fc)$$

$$\begin{aligned}
 &-(ab)(gh)\{(de) + (fc)\} - (ac)(fh)\{(de) + (gb)\} + (ae)(dh)\{(ah) + (de)\} \\
 &-(cd)(ef)\{(ah) + (gb)\} - (bd)(eg)\{(ah) + (fc)\} + (bf)(cg)\{(fc) + (gb)\} \\
 &-(ae)(df)(dg) - (dh)(af)(ag) - (fb)(ga)(gd) - (gc)(fa)(fd) \\
 &+ (hd)(ec)(eb) + (ea)(hc)(hb) + (cg)(bh)(be) + (bf)(ch)(ce).
 \end{aligned}$$

Wir wissen schon, dass dieser Ausdruck sich nicht ändert, wenn man die erste und zweite Schichte, oder wenn man die dritte und vierte mit einander vertauscht. Bezeichnen wir nun die Ausdrücke, welche sich ergeben, wenn man die erste und dritte, und wenn man die zweite und dritte Schichte mit einander vertauscht, resp. mit Δ_1 und Δ_{11} , so ist

$$\begin{aligned}
 \Delta_1 = & (de)(fc)(gb) + (ah)(fc)(gb) + (ah)(de)(gb) + (ah)(de)(fc) \\
 & -(ae)(dh)\{(gb) + (fc)\} - (ac)(fh)\{(gb) + (de)\} + (ab)(gh)\{(ah) + (gb)\} \\
 & -(cg)(bf)\{(ah) + (de)\} - (eg)(bd)\{(ah) + (fc)\} + (ef)(cd)\{(fc) + (de)\} \\
 & -(ab)(gf)(gd) - (gh)(af)(ad) - (fe)(da)(dg) - (dc)(fa)(fg) \\
 & + (hg)(bc)(be) + (ba)(hc)(he) + (cd)(eh)(eb) + (ef)(ch)(cb),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_{11} = & (de)(fc)(gb) + (ah)(fc)(gb) + (ah)(de)(gb) + (ah)(de)(fc) \\
 & -(ab)(gh)\{(fc) + (de)\} - (ae)(dh)\{(fc) + (gb)\} + (ac)(fh)\{(ah) + (fc)\} \\
 & -(ef)(cd)\{(ah) + (gb)\} - (bf)(cg)\{(ah) + (de)\} + (bd)(eg)\{(de) + (gb)\} \\
 & -(ac)(fd)(fg) - (fh)(ad)(ag) - (db)(ga)(gf) - (ge)(da)(df) \\
 & + (hf)(ce)(cb) + (ca)(he)(hb) + (eg)(bh)(bc) + (bd)(eh)(ec).
 \end{aligned}$$

§. 23. Die Summe dieser drei Ausdrücke, $W = \Delta + \Delta_1 + \Delta_{11}$, ist nach Cayley's Benennung eine vollständige Hyperdeterminante, eine symmetrische Function der Coëfficienten von Φ sowohl in Beziehung auf alle vier Schichten, als auch auf die beiden Variablen x, y einer jeden Schichte. Diese Function W ist dasselbe, was Cayley auf S. 16 der angeführten Abhandlung mit

$$\mathfrak{C} + \mathfrak{D} - 3\mathfrak{E} - \mathfrak{F} + 2B + 3\mathfrak{H}$$

bezeichnet. Um unsere Formeln an diejenigen Cayley's anknüpfen zu können, müssen wir einen Augenblick auf die dort gegebene kunstreiche und bewundernswerthe Construction von zwei vollständigen Hyperdeterminanten sechsten Grades der sechzehn Coëfficienten eines vierschichtig linearen Polynoms mit je zwei Variablen näher eingehen. Wir haben von Anfang an die Coëfficienten mit denselben Buchstaben bezeichnet wie dort, und nur die acht Variablen anders benennt. Während nämlich Cayley die Schichten durch Buchstaben (x, y, z, w) und die zusammen gehörigen Variablen durch Zeiger (1, 2) unterscheidet, haben wir umgekehrt die Schichten durch die Zeiger 1, 2, 3, 4 und die Variablen eines jeden Paares durch die Buchstaben x, y unterschieden. Es wird daher sogleich klar sein, wie es gemeint ist, wenn Cayley

$$a = (1111), \quad b = (2111), \quad c = (1211), \quad \dots \quad p = (2222)$$

setzt. Nun sollen nach Cayley in dem Schema

$$\begin{array}{cccc}
 1 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 1 \\
 2 & 2 & 2 & 2 \\
 2 & 2 & 2 & 2 \\
 2 & 2 & 2 & 2
 \end{array}$$

welches in dieser Anordnung das Product $a^3 p^3$ bedeutet, die Elemente jeder Verticalzeile auf alle möglichen Arten permutirt werden, und jede Vertauschung von bloss zwei verschiedenen Elementen mit einem Wechsel des Vorzeichens des durch das Schema bezeichneten Productes begleitet sein. Da die Ordnung der Horizontalzeilen gleichgültig ist, so braucht man die Ziffer einer Verticalzeile, z. B. der letzten, nicht zu permutiren. Die so erhaltenen Producte werden nun in Aggregate gesondert, deren Glieder nur theils durch Vertauschung der Schichten (resp. Verticalzeilen) ohne Zeichenwechsel, theils durch die mit einem Zeichenwechsel begleitete Vertauschung der beiden Variablen einer einzelnen Schichte (alle 1 und 2 einer Verticalzeile werden auf einmal resp. in 2, 1 umgewandelt) aus einander hervorgehen. Man erhält so folgende acht Aggregate:

$$\begin{array}{ll|ll} \mathfrak{A} = \Sigma a^3 p^3, & 8 \text{ Glieder,} & \mathfrak{C} = \Sigma -bocnel, & 8 \text{ Glieder.} \\ \mathfrak{B} = \Sigma -a^2 p^2 bo, & 32 \text{ „} & \mathfrak{F} = \Sigma ap^2 bgi, & 96 \text{ „} \\ \mathfrak{E} = \Sigma a^2 p^2 dm, & 24 \text{ „} & \mathfrak{G} = \Sigma apcfjo, & 96 \text{ „} \\ \mathfrak{D} = \Sigma apbocn, & 48 \text{ „} & \mathfrak{H} = \Sigma p^2 bcei, & 16 \text{ „} \end{array}$$

Die gesuchten Hyperdeterminanten werden nun solche homogene lineare Polynome dieser symmetrischen Aggregate sein, welche unter Anderem der Bedingung

$$\delta = i \frac{d}{da} + j \frac{d}{db} + k \frac{d}{dc} + \dots + p \frac{d}{dh} = 0$$

genügen müssen. Wenn nun die folgenden Summen sich nur auf die drei ersten Schritte von a nach b, c, e , nicht auf den vierten nach i erstrecken, so ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \Sigma (a^3 p^3 - h^3 i^3), \\ \mathfrak{B} &= \Sigma ap \cdot \Sigma h^2 i^2 - \Sigma hi \cdot \Sigma a^2 p^2, \\ \mathfrak{C} &= \Sigma a^2 p^2 (dm + fk + gj) - \Sigma h^2 i^2 (el + cn + bo), \\ \mathfrak{D} &= \Sigma ap \cdot \Sigma hiel - \Sigma hi \cdot \Sigma apdm, \\ \mathfrak{E} &= \Sigma dm fkgj - \Sigma elcnbo. \end{aligned}$$

Aus diesen Formeln folgt

$$\mathfrak{A} + 3\mathfrak{C} + 6\mathfrak{E} = (\Sigma ap)^3 - (\Sigma hi)^3,$$

$$\mathfrak{B} + 2\mathfrak{D} = \Sigma ap \cdot (\Sigma hi)^2 - \Sigma hi \cdot (\Sigma ap)^2,$$

also

$$\mathfrak{A} + 3\mathfrak{B} + 3\mathfrak{C} + 6\mathfrak{D} + 6\mathfrak{E} = (\Sigma (ap - hi))^3 = S^3,$$

wenn wir fortan

$$ap - hi + dm - el + fk - cn + gj - bo = S$$

setzen. Man sieht schon aus der Form dieses Polynoms, dass es der Bedingung $\delta = 0$ genügt.

Gebrauchen wir folgende einander gleichsam entgegengesetzte Operationszeichen

$$D = i \frac{d}{da} + j \frac{d}{db} + k \frac{d}{dc} + l \frac{d}{dd} + m \frac{d}{de} + n \frac{d}{df} + o \frac{d}{dg} + p \frac{d}{dh},$$

$$\delta = a \frac{d}{di} + b \frac{d}{dj} + c \frac{d}{dk} + d \frac{d}{dl} + e \frac{d}{dm} + f \frac{d}{dn} + g \frac{d}{do} + h \frac{d}{dp},$$

so ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} &= \frac{1}{2} \delta \Sigma ap \times D \Sigma (a^2 p^2 - h^2 i^2) + \frac{1}{2} D \Sigma ap \times \delta \Sigma (a^2 p^2 - h^2 i^2) - 2 \Sigma aphi (ap - ih) \\ &+ \Sigma \{ ap^2 \cdot D bce - i^2 h \cdot D df g + a^2 p \cdot \delta lno - ih^2 \cdot \delta jkm \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{G} &= \Sigma ip \cdot \Sigma ah \cdot \Sigma (ap - hi) - \Sigma ah \cdot \Sigma ip (ap - hi) - \Sigma ip \cdot \Sigma ah (ap - hi) \\ &\quad - \Sigma aphi \cdot \Sigma (ap - hi) + 2 \Sigma aphi (ap - hi) \\ &\quad + \Sigma \{ ip (a \cdot Ddfg - h \cdot Dbce) + ah (p \cdot \delta jkm - i \cdot \delta lno) \}, \\ \mathfrak{H} &= \Sigma \{ ah (a \cdot lno - h \cdot jkm) + ip (p \cdot bce - i \cdot dfg) \}.\end{aligned}$$

Hierbei ist zu bemerken, dass

$$D^2 bce = 2 \delta jkm, \quad D^2 dfg = 2 \delta lno, \quad D \delta jkm = 3 jkm, \quad D \delta lno = 3 lno$$

ist. Sind die drei letzten Aggregate unter diese Formen gebracht, so findet man bald, dass

$$D(\mathfrak{F} - 2\mathfrak{G} - 3\mathfrak{H}) = D(\mathfrak{C} + \mathfrak{D} - 3\mathfrak{E}).$$

Der Ausdruck

$$W = \mathfrak{C} + \mathfrak{D} - 3\mathfrak{E} - \mathfrak{F} + 2\mathfrak{G} + 3\mathfrak{H}$$

genügt also allen Bedingungs-Gleichungen von der Form $D = 0$ und ist daher eine vollständige Hyperdeterminante. Man bringt denselben nun leicht unter folgende Form:

$$W = -\frac{1}{2} \Sigma(a, h)(de, de) - \frac{1}{2} \Sigma(a, h)(ah, de) + \frac{1}{2} \Sigma(a, h)(de, cf) + \frac{1}{2} \Sigma\{(bce, ah^2) - (dfg, a^2h)\},$$

wo überhaupt

$$(M, N) = \sum_{m=0}^n (-1)^m D^m M \cdot D^{n-m} N$$

gesetzt wurde, wenn M, N homogene Functionen n^{ten} Grades der Variabeln a, b, c, d, e, f, g, h bezeichnen. Diese Form zeigt unmittelbar, dass die Bedingung $DW = 0$ erfüllt ist. Wenn man hier nach §. 20 (a) entwickelt, so wird man die Formel

$$W = \Delta + \Delta_1 + \Delta_{11}$$

richtig finden.

§. 24. Wenn Δ in Δ_1, Δ_{11} übergeht, so mögen auch H, K in H_1, K_1, H_{11}, K_{11} übergehen. Wir haben nun die Beziehungen dieser Functionen unter sich und zu vollständigen Hyperdeterminanten zu erörtern.

Es war oben

$$K = \frac{1}{4}(q, s) - (r, r).$$

Aber

$$\begin{aligned}(q, s) &= (ad, eh) - (ad, fg) - (bc, eh) + (bc, fg) \\ &= (ah)(de) + (gb)(fc) + (af)(gd) + (ag)(fd) + (eb)(ch) + (ec)(bh) + (ae)(dh) + (bf)(cg), \\ (r, r) &= -(ah)^2 - (de)^2 - (gb)^2 - (fc)^2 + 2(ah)(de) + 2(gb)(fc) - 4(ae)(dh) - 4(bf)(cg) \\ &\quad - 2(ah)(gb) - 2(ah)(fc) - 2(de)(gb) - 2(de)(fc) + 4(ab)(gh) + 4(ac)(fh) \\ &\quad + 4(bd)(eg) + 4(cd)(ef); \end{aligned}$$

also wenn, wie oben,

$$S = (ah) + (de) + (gb) + (fc)$$

gesetzt wird,

$$K = S^2 + 8(ae)(dh) + 8(bf)(cg) + 4(af)(gd) + 4(ag)(fd) + 4(be)(hc) + 4(bh)(ec) - 4(ab)(gh) - 4(cd)(ef) - 4(ac)(fh) - 4(bd)(eg).$$

Setzt man jetzt

$$\begin{aligned}J &= (ab)(gh) + (dc)(fe) - (ac)(fh) - (db)(ge) + (he)(cb) + (ad)(fg), \\ J_1 &= (ac)(fh) + (db)(ge) - (ae)(dh) - (fb)(gc) + (hb)(ec) + (ag)(df), \\ J_{11} &= (ae)(dh) + (fb)(gc) - (ab)(gh) - (dc)(fe) + (hc)(be) + (af)(gd), \end{aligned}$$

so bestehen die Relationen

$$\begin{aligned} J + J' + J'' &= 0, \\ K &= S^2 - 4(J - J'') \quad , \quad K' = S^2 - 4(J'' - J) \quad , \quad K'' = S^2 - 4(J - J'), \\ \Delta' - \Delta'' &= SJ \quad , \quad \Delta'' - \Delta = SJ' \quad , \quad \Delta - \Delta' = SJ'', \end{aligned}$$

Da nun $W = \Delta + \Delta' + \Delta''$ ist, so folgt hieraus

$$3\Delta = W - S(J' - J''), \text{ etc.}$$

Man hat auch $K' - K'' = 12J$, etc. — Man überzeugt sich leicht, dass die Function $\mathfrak{s}$ der Elemente a, b, c, d, e, f, g, h als Resultante eines dreischichtig linearen Polynoms sich nicht ändert, wie man auch die drei ersten Schichten permutiren mag. Das Gleiche gilt also auch von $Q = \{\mathfrak{s}, \mathfrak{s}, \mathfrak{s}\}$ und $R = (\mathfrak{s}, \mathfrak{s})$. Oben haben wir aber auch gesehen, dass diese Functionen sich nicht ändern, wenn man die dritte und vierte Schichte mit einander vertauscht. Folglich bleiben sie ungeändert, wie man auch alle vier Schichten permutiren mag. Da sie nun auch der Bedingung $D=0$ genügen, so sind sie vollständige Hyperdeterminanten. — Wir haben nun

$$\frac{1}{4}R = K^2 - 12H = S^4 - 8S^2(J' - J'') + 16(J' - J'')^2 - 12H,$$

und ebenso mit fortschreitenden Accenten. Zieht man zwei Formen von einander ab, so ergibt sich

$$H' - H'' = 2S^2J + 4J(J' - J'') = 2S\Delta' - 4J''J - (2S\Delta'' - 4JJ').$$

Wenn man also

$$H = 2S\Delta - 4J'J'' + T$$

setzt, so wird T durch eine Permutation der vier Schichten nicht geändert. Dann ist

$$\begin{aligned} 3H &= 2SW - 2S^2(J' - J'') - 12J'J'' + 3T, \\ \frac{1}{16}Q &= 24[W - S(J' - J'')]^2 - 6(S^2 - 4(J' - J''))(2SW - 2S^2(J' - J'') - 12J'J'' + 3T) \\ &\quad + (S^2 - 4(J' - J''))^3 \\ &= 24W^2 - 12WS^3 + S^6 + 12S^2(J'^2 + J''^2 + J''^2) + 32(J' - J'')(J'' - J)(J - J') - 18S^2T \\ &\quad + 72T(J' - J''). \end{aligned}$$

Da hier mit Ausnahme des letzten Gliedes alles symmetrisch ist, so muss $T=0$ sein. Also ist

$$\begin{aligned} H &= 2S\Delta - 4J'J'', \\ \frac{1}{4}R &= -8SW + S^4 + 8(J'^2 + J''^2 + J''^2). \end{aligned}$$

Wenn wir daher ausser den zwei vollständigen Hyperdeterminanten S und W noch die zwei folgenden

$$\Sigma = J'^2 + J''^2 + J''^2 \quad , \quad \Pi = (J' - J'')(J'' - J)(J - J')$$

in Rechnung bringen, so haben wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{16}Q &= 24W^2 - 12S^3W + S^6 + 12S^2\Sigma + 32\Pi, \\ \frac{1}{4}R &= -8SW + S^4 + 8\Sigma, \end{aligned}$$

und wenn wir dieses im Ausdrücke für die Resultante von Φ substituiren,

$$\begin{aligned} \frac{1}{3096}U &= 36W^4 - 4S^3W^3 + 12W^2(8\Pi - 5S^2\Sigma) + 6SW(S^4\Sigma - 8S^2\Pi + 16\Sigma^2) + 4S^6\Pi - 3S^4\Sigma^2 \\ &\quad + 48S^2\Sigma\Pi - 32\Sigma^3 + 64\Pi^2, \end{aligned}$$

wo

$$\Sigma^3 - 2\Pi^2 = 54J'^2J''^2J''^2$$

ist. Hiemit ist die Resultante U in Function der vier Hyperdeterminanten S, W, Σ, Π , welche resp. vom 2., 6., 8. und 12. Grade sind, gegeben. Sie selbst ist vom 24. Grade. An eine Zerlegung in Factoren ist kaum zu glauben. Denn da eine solche in der expliciten Form, wie der Ausdruck vor uns liegt, nicht Statt findet, so könnte eine solche nur vermittelt einer identischen Relation zwischen den vier Functionen S, W, Σ, Π möglich gemacht werden. Aber höchst wahrscheinlich sind alle diese vier Functionen unter sich unabhängig.

§. 25. Im symmetrischen Falle ist freilich $J = J' = J'' = 0$, also $\Sigma = 0, \Pi = 0$, und daher

$$U = 16384 W^3 (9 W - S^3),$$

aber nur $9 W - S^3$ die uns schon aus §. 17, (II), bekannte Resultante eines biquadratischen Polynoms mit zwei Variablen. Aber auch der zum Cubus erhobene Factor hat seine gute Bedeutung. Halten wir nämlich auch in diesem symmetrischen Falle immer noch die vier Gruppen von je zwei Variablen aus einander, und setzen

$$\begin{aligned} \Phi = & a x_1 x_2 x_3 x_4 + b (y_1 x_2 x_3 x_4 + x_1 y_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 y_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 y_4) \\ & + c (y_1 y_2 x_3 x_4 + y_1 x_2 y_3 x_4 + y_1 x_2 x_3 y_4 + x_1 y_2 y_3 x_4 + x_1 y_2 x_3 y_4 + x_1 x_2 y_3 y_4) \\ & + d (y_1 y_2 y_3 x_4 + y_1 y_2 x_3 y_4 + y_1 x_2 y_3 y_4 + x_1 y_2 y_3 y_4) + e y_1 y_2 y_3 y_4, \end{aligned}$$

so ist

$$\Delta = \Delta' = \Delta'' = \begin{vmatrix} a \cdot b \cdot c \\ b \cdot c \cdot d \\ c \cdot d \cdot e \end{vmatrix}^2, \quad S = a e - 4 b d + 3 c^2,$$

also mit Weglassung des numerischen Factors

$$U = \begin{vmatrix} a \cdot b \cdot c \\ b \cdot c \cdot d \\ c \cdot d \cdot e \end{vmatrix}^6 \{ 27 \begin{vmatrix} a \cdot b \cdot c \\ b \cdot c \cdot d \\ c \cdot d \cdot e \end{vmatrix}^2 - (a e - 4 b d + 3 c^2)^3 \} = \theta^6 t.$$

Verschwindet die Resultante U , so ist

$$x_1 x_2 x_3 x_4 : \Sigma y_1 x_2 x_3 x_4 : \Sigma y_1 y_2 x_3 x_4 : \Sigma y_1 y_2 y_3 x_4 : y_1 y_2 y_3 y_4 = \frac{dU}{da} : \frac{dU}{db} : \frac{dU}{dc} : \frac{dU}{dd} : \frac{dU}{de}.$$

Also sind die vier Verhältnisse $x_1 : y_1, x_2 : y_2, x_3 : y_3, x_4 : y_4$ die Wurzeln der Gleichung

$$\frac{dU}{de} x^4 - \frac{dU}{dd} x^3 + \frac{dU}{dc} x^2 - \frac{dU}{db} x + \frac{dU}{da} = 0. \quad (a)$$

Nehmen wir nun, um die Resultante U verschwinden zu lassen, $t = 0$ an, so verwandelt sich die letzte Gleichung in

$$\theta^6 \left(\frac{dt}{de} x^4 - \frac{dt}{dd} x^3 + \frac{dt}{dc} x^2 - \frac{dt}{db} x + \frac{dt}{da} \right) = 0.$$

Da uns aber t schon als Resultante des biquadratischen Polynoms in x, y bekannt ist (§. 17, II), so wissen wir auch, dass für $t = 0$ die Grössen $\frac{dt}{da}, \frac{1}{4} \frac{dt}{db}, \frac{1}{6} \frac{dt}{dc}, \frac{1}{4} \frac{dt}{dd}, \frac{dt}{de}$ eine geometrische Reihe bilden, und schliessen hieraus, dass die vorliegende Gleichung lauter gleiche Wurzeln hat. Also ist $x_1 : y_1 = x_2 : y_2 = x_3 : y_3 = x_4 : y_4$. D. h. diese Lösung stimmt mit dem bekannten Fall des biquadratischen Polynoms überein. Nehmen wir dagegen $\theta = 0$ an, so reducirt sich jene Gleichung (a) auf

$$\frac{d\theta}{de} x^4 - \frac{d\theta}{dd} x^3 + \frac{d\theta}{dc} x^2 - \frac{d\theta}{db} x + \frac{d\theta}{da} = 0.$$

Dann gibt es aber auch immer zwei Grössen h, k , welche den drei Gleichungen $a + bh + ck = 0, b + ch + dk = 0, c + dh + ek = 0$ zugleich genügen, und wenn wir diese Gleichungen so darstellen:

$$\begin{aligned} a + bh + ck &= 0, \\ bh + ck + dhk &= 0, \\ ck + dhk + ek^2 &= 0, \end{aligned}$$

so sehen wir leicht, dass

$$\frac{d\theta}{a} : \frac{d\theta}{db} : \frac{d\theta}{dc} : \frac{d\theta}{dd} : \frac{d\theta}{de} = 1 : 2h : (2k + h^2) : 2hk : k^2$$

ist. Die Gleichung in x wird also

$$(kx^2 - hx + 1)^2 = 0.$$

Bezeichnen wir die Wurzeln der Gleichung $kx^2 - hx + 1 = 0$ mit $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$, so ist $\alpha + \beta = h, \alpha\beta = k$, und wir haben

$$y_1 = \alpha x_1, y_2 = \alpha x_2, y_3 = \beta x_3, y_4 = \beta x_4.$$

Die Gleichungen $\frac{d\Phi}{dx_1} = 0, \frac{d\Phi}{dy_1} = 0$ werden

$$\begin{aligned} a + b(\alpha + \beta + \beta) + c(\alpha\beta + \alpha\beta + \beta^2) + d\alpha\beta^2 &= 0, \\ b + c(\alpha + \beta + \beta) + d(\alpha\beta + \alpha\beta + \beta^2) + e\alpha\beta^2 &= 0, \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} a + bh + ck + (b + ch + dk)\beta &= 0, \\ b + ch + dk + (c + dh + ek)\beta &= 0. \end{aligned}$$

Die Gleichungen $\frac{d\Phi}{dx_3} = 0, \frac{d\Phi}{dy_3} = 0$ ergeben sich aus diesen durch Vertauschung von α und β . Man sieht nun leicht, dass auch für $\theta = 0$ alle acht abgeleiteten Gleichungen des Polynoms Φ erfüllt sind. Hierher gehören aber sechs Lösungen, weil die Elemente $\alpha, \alpha, \beta, \beta$ sich auf so viele Arten permutiren lassen. Daher muss der Factor θ in der Resultante sechsmal vorkommen. Also ist diese $\theta^6 t$, und nicht bloss t , wie Cayley annimmt. Die Resultante U ist also selbst in diesem speciellsten Falle wesentlich vom 24. Grade. Im allgemeinen Falle, wo alle 16 Elemente unter sich unabhängig sind, ist daher gar kein fremder Factor von U zu suchen.

Wir wollen die Voraussetzung $x_1 : y_1 = x_2 : y_2, x_3 : y_3 = x_4 : y_4$ noch a priori zu behandeln suchen und setzen daher

$$\Phi = (ax^2 + 2bxy + cy^2)x'^2 + 2(bx^2 + 2cxy + dy^2)x'y' + (cx^2 + 2dxy + ey^2)y'^2.$$

Die acht abgeleiteten Gleichungen des allgemeinen Falles reduciren sich dann auf vier:

$$\frac{d\Phi}{dx} = 0, \frac{d\Phi}{dy} = 0, \frac{d\Phi}{dx'} = 0, \frac{d\Phi}{dy'} = 0.$$

Nehmen wir zuerst nur die zwei letzten von diesen, so ist ihre Resultante:

$$V = (ax^2 + 2bxy + cy^2)(cx^2 + 2dxy + ey^2) - (bx^2 + 2cxy + dy^2)^2,$$

und wenn wir abkürzend

$$\theta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix}, \text{ die reciproken Elemente } \begin{matrix} \alpha.\beta.\gamma, & \zeta - 4\gamma = 3\rho \\ \beta.\zeta.\delta \\ \gamma.\delta.\varepsilon \end{matrix}$$

setzen, so haben wir

$$V = \varepsilon x^4 - 2\delta x^3 y + (2\gamma + \varsigma) x^2 y^2 - 2\beta x y^3 + \alpha y^4,$$

und die zwei ersten Gleichungen des ursprünglichen Systemes verwandeln sich in

$$\frac{dV}{dx} = 0, \quad \frac{dV}{dy} = 0.$$

Da $2\gamma + \varsigma = 6\gamma + 3\rho = \frac{3}{2}(\varsigma - \rho)$ ist, so wird die Resultante des Polynoms V nach der bekannten Formel

$$\begin{vmatrix} \varepsilon & -\frac{1}{2}\delta & \gamma + \frac{1}{2}\rho \\ -\frac{1}{2}\delta & \frac{1}{4}(\varsigma - \rho) & -\frac{1}{2}\beta \\ \gamma + \frac{1}{2}\rho & -\frac{1}{2}\beta & \alpha \end{vmatrix}^2 - \left\{ \frac{1}{3}(\alpha\varepsilon - \beta\delta) + (\gamma + \frac{1}{2}\rho)^2 \right\}^3,$$

und wenn wir in der Determinante dritten Grades die mittlere Horizontalzeile und die mittlere Verticalzeile mit -2 , also den ganzen Ausdruck mit 16 multipliciren, und, die Gleichungen $\alpha\varepsilon - \gamma^2 = \theta c$, $\beta\delta - \gamma\varsigma = \theta c$ beachtend, $\alpha\varepsilon - \beta\delta = \gamma(\gamma - \varsigma) = -3\gamma(\gamma + \rho)$ setzen,

$$\begin{vmatrix} \varepsilon & \delta & \gamma + \frac{1}{2}\rho \\ \delta & \varsigma - \rho & \beta \\ \gamma + \frac{1}{2}\rho & \beta & \alpha \end{vmatrix}^2 - \frac{1}{4}\rho^6 = (\theta^2 - \frac{1}{2}\rho^3)^2 - \frac{1}{4}\rho^6 = \theta^2(\theta^2 - \rho^3).$$

Der Factor $\theta^2 - \rho^3$ ist die bekannte Resultante des Polynoms $ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4$ und würde, gleich Null gesetzt, $x:y = x':y'$ geben. Wenn wir diese Lösung nicht wollen, so verlangen wir, dass die zwei gleichen Wurzeln der Gleichung $V(x, y) = 0$ nicht mit den zwei gleichen Wurzeln der Gleichung $V(x', y') = 0$, die wir, mit den Gleichungen $\frac{dV}{dx} = 0$, $\frac{dV}{dy} = 0$ anfangend, erhalten hätten, zusammenfallen, d. h., wir verlangen, dass das Polynom V zwei Paare gleicher linearer Factoren habe, oder dass das System $\frac{dV}{dx} = 0$, $\frac{dV}{dy} = 0$ nicht nur eine, sondern zwei verschiedene Lösungen gestatte. Daher darf nicht nur seine Resultante, sondern es müssen auch die Differential-Coëfficienten dieser Resultante $\theta^2(\theta^2 - \rho^3)$ verschwinden. Dies erreichen wir, wenn wir $\theta = 0$ setzen. Die ferneren Schlüsse sind wie oben.

§. 26. Identificiren wir nur die Coëfficienten der drei ersten Schichten, indem wir

$$\begin{aligned} b &= c = e, & j &= k = m, \\ d &= f = g, & l &= n = o \end{aligned}$$

setzen, so wird $\Delta = \Delta_1 = \Delta_{11}$, also $J = J_1 = J_{11} = 0$, $\Sigma = 0$, $\Pi = 0$, und wir bekommen mit Weglassung des numerischen Factors

$$U = W^3(gW - S^3).$$

Da jetzt $\frac{1}{3}W = \Delta$ durch keine Permutation der vier Schichten geändert wird, so dürfen wir in seinem Ausdruck

$$\begin{vmatrix} q & r & s \\ q' & r' & s' \\ q'' & r'' & s'' \end{vmatrix}$$

die zwei letzten Schichten mit den zwei ersten vertauschen, wodurch derselbe die Gestalt

$$\begin{vmatrix} (ae) & (af) + (be) & (bf) \\ (ag) + (ce) & (ah) + (cf) + (bg) + (de) & (bh) + (df) \\ (cg) & (ch) + (dg) & (dh) \end{vmatrix}$$

(Schläfli.)

r

erhält, wo $(ae) = am - ei$, etc. gesetzt wurde. Aendern wir nun die Bezeichnung der Coefficienten nach folgendem Schema

$$\begin{array}{c|c} a & a \\ b=c=e & b \\ d=f=g & c \\ h & d \end{array} \quad \begin{array}{c|c} i & a' \\ j=k=m & b' \\ l=n=o & c' \\ p & d' \end{array}$$

und setzen z. B. $(ab) = ab' - a'b$, so wird

$$W = 3 \begin{vmatrix} (ab) & (ac) & (bc) \\ (ac) & (ad) + (bc) & (bd) \\ (bc) & (bd) & (cd) \end{vmatrix}, \quad S = (ad) - 3(bc).$$

Setzen wir $x_1 : y_1 = x_2 : y_2 = x_3 : y_3$, so wird

$$\Phi = (ax' + a'y')x^3 + 3(bx' + b'y')x^2y + 3(cx' + c'y')xy^2 + (dx' + d'y')y^3,$$

und wir haben nur die Resultante der kubischen Gleichungen

$$\begin{aligned} ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 &= 0, \\ a'x^3 + 3b'x^2y + 3c'xy^2 + d'y^3 &= 0 \end{aligned}$$

zu suchen. Diese ist wirklich $9W - S^3$. Wenn wir also diesen Factor von U gleich Null setzen, so erhalten wir eine Lösung des Systems der abgeleiteten Gleichungen von

$$\Phi = (ax_4 + a'y_4)x_1x_2x_3 + (bx_4 + b'y_4)(y_1x_2x_3 + x_1y_2x_3 + x_1x_2y_3) + (cx_4 + c'y_4)(x_1y_2y_3 + y_1x_2y_3 + y_1y_2x_3) + (dx_4 + d'y_4)y_1y_2y_3,$$

worin $x_1 : y_1 = x_2 : y_2 = x_3 : y_3$ ist.

Wir wollen nun auch diejenigen Lösungen untersuchen, welche dem Verschwinden des Factors W entsprechen. Die reciproken Elemente der Determinante $\frac{1}{3}W = \Delta$ seien

$$\begin{array}{c} A \cdot F \cdot E \\ F \cdot B \cdot D \\ E \cdot D \cdot C, \end{array}$$

so findet man leicht $B = E$. Wenn aber $\Delta = 0$ ist, so sind die reciproken Elemente aller drei Horizontalzeilen proportional. Wenn wir also $F = rA$ setzen, so wird $E = B = r^2A$, und wir erhalten

$$A : F : E : D : C = 1 : r : r^2 : r^3 : r^4.$$

Zugleich ist

$$\frac{d\Delta}{da} : \frac{d\Delta}{db} : \frac{d\Delta}{dc} : \frac{d\Delta}{dd} : \frac{d\Delta}{da'} : \dots = x_4 : x_1x_2x_3 : x_4 \sum y_1x_2x_3 : x_4 \sum x_1y_2y_3 : x_4 \cdot y_1y_2y_3 : y_4 \cdot x_1x_2x_3 : \dots$$

Es ist aber

$$\begin{array}{l} \frac{d\Delta}{da} = b'A + 2c'F + d'B, \\ \frac{d\Delta}{db} = -a'A + c'(2E + B) + 2d'D, \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{d\Delta}{dc} = -2a'F + b'(2E + B) + d'C, \\ \frac{d\Delta}{dd} = -a'B - 2b'D - c'C. \end{array}$$

Die Gleichung, deren drei Wurzeln $y_1 : x_1, y_2 : x_2, y_3 : x_3$ sind, wird daher

$$\begin{aligned} (b' + 2c'r + d'r^2)t^3 + (a' - 3c'r^2 - 2d'r^3)t^2 + (-2a'r - 3b'r^2 + d'r^4)t + a'r^2 + 2b'r^3 + c'r^4 \\ = (t - r)^2 \{(b' + 2c'r + d'r^2)t + a' + 2b'r + c'r^2\} = 0. \end{aligned}$$

(Der zweite Factor gibt denselben Werth von t , wenn man auch die Accente weglässt.) Diese Gleichung hat zwei gleiche Wurzeln, und da nun drei Elemente, von denen zwei gleich sind, auf drei Arten permutirt werden können, so entsprechen der Gleichung $\Delta = 0$ drei Lösungen des Systemes. Daher erscheint in der totalen Resultante U der Factor Δ auf der dritten Potenz. — Das Verhältniss $x_4 : y_4$ ist durch die Gleichung

$$ax_4 + a'y_4 + 2r(bx_4 + b'y_4) + r^2(cx_4 + c'y_4) = 0,$$

oder

$$bx_4 + b'y_4 + 2r(cx_4 + c'y_4) + r^2(dx_4 + d'y_4) = 0$$

bestimmt.

§. 27. Setzen wir endlich in den allgemeinen Formeln $b = c$, $e = i$, $f = g = j = k$, $h = l$, $n = o$, wodurch die Unterschiede zwischen der ersten und zweiten Schichte, und wiederum zwischen der dritten und vierten, bei den Coëfficienten aufgehoben werden, so wird

$$\begin{aligned} \Phi &= (ax_1x_2 + b(y_1x_2 + x_1y_2) + dy_1y_2)x_3x_4 \\ &+ (ex_1x_2 + f(y_1x_2 + x_1y_2) + hy_1y_2)(y_3x_4 + x_3y_4) \\ &+ (mx_1x_2 + n(y_1x_2 + x_1y_2) + py_1y_2)y_3y_4, \end{aligned}$$

$$S = 2f^2 + ap + dm - 2(bn + eh), \quad J = 0,$$

$$\begin{aligned} J_1 = -J_2 = -f^3 + f^2(ap + dm + 2bn + 2eh) - 2f(ahn + den + pbe + mbh) \\ - apdm - (bn - eh)^2 + amh^2 + dpe^2 + adn^2 + mpb^2, \end{aligned}$$

$$\Delta + SJ_1 = \Delta_1 = \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & e & m \\ b & f & n \\ d & h & p \end{vmatrix}^2 = \theta^2,$$

und endlich, abgesehen von einem numerischen Factor, die Resultante

$$U = \theta^4 \{ (54\theta^2 - S^3 - 36SJ_1)^2 - (S^2 - 12J_1)^3 \}.$$

Sie zerfällt somit in vier gleiche Factoren dritten und einen zwölften Grades. Der letzte ist offenbar die Resultante des zweischichtig-quadratischen Polynoms

$$(ax^2 + 2bxy + dy^2)x'^2 + 2(ex^2 + 2fxy + hy^2)x'y' + (mx^2 + 2nxy + py^2)y'^2.$$

Ist dagegen der potenzierte Factor $\theta = 0$, so wird es vier Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ geben, welche den Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha + b\alpha + d\beta &= 0, & \alpha + e\gamma + m\delta &= 0, \\ e + f\alpha + h\beta &= 0, & b + f\gamma + n\delta &= 0, \\ m + n\alpha + p\beta &= 0, & d + h\gamma + p\delta &= 0 \end{aligned}$$

genügen, und die nach t aufgelösten Gleichungen

$$t^2 - \alpha t + \beta = 0, \quad t^2 - \gamma t + \delta = 0$$

werden resp. die Verhältnisse

$$\frac{y_1}{x_1}, \frac{y_2}{x_2} \text{ und } \frac{y_3}{x_3}, \frac{y_4}{x_4}$$

zu Wurzeln haben. Da aber die Wurzeln eines jeden Paares zwei Male permutirt werden können, so entsprechen der Gleichung $\theta = 0$ im Ganzen vier Lösungen, wesshalb in der totalen Resultante U der Factor θ auf der vierten Potenz erscheint.

§. 28. Ueber die Classengleichung einer nach Grad freien algebraischen einfach bedingten Totalität.

Eine homogene Gleichung m^{ten} Grades zwischen $n + 1$ Variablen,

$$f(x, y, z, \dots w) = 0, \quad (1)$$

hat mit einer linearen Gleichung

$$\rho = px + qy + \dots + sw = 0 \quad (2)$$

im Allgemeinen ∞^{n-2} Lösungen gemein. Weichen nun die Verhältnisse der Variablen um Variationen erster Ordnung von irgend einer bestimmten Lösung ab, doch so, dass die höhere Gleichung (1) immer erfüllt bleibt und daher nur $n - 1$ Variationen unter sich unabhängig sind, so wird im Allgemeinen ρ von der ersten Ordnung sein; und wenn wir verlangen, dass ρ von der zweiten Ordnung sei, ohne dass diese Bedingung die völlige Unabhängigkeit jener $n - 1$ Variationen irgendwie beschränke, so werden dagegen die Verhältnisse $p : q : \dots : s$ einer Beschränkung unterworfen, wodurch die Anzahl der Polynome ρ von ∞^n auf ∞^{n-1} herabgebracht wird. In diesem besonderen Falle sagen wir, die lineare Gleichung (2) habe eine Lösungsgemeinschaft erster Ordnung mit der höheren Gleichung (1). Wir erkennen sogleich, dass dies die Coincidenz der Differentialgleichungen erster Ordnung von (1) und (2) erfordert, also

$$p : q : \dots : s = \frac{df}{dx} : \frac{df}{dy} : \dots : \frac{df}{dw},$$

was für n Gleichungen zählt. Da

$$x \frac{df}{dx} + y \frac{df}{dy} + \dots + w \frac{df}{dw} = mf,$$

so kann immer eine von den Gleichungen (1) und (2) die andere ersetzen. Wir bekommen so ein System von $n + 1$ Gleichungen, aus welchem die n Verhältnisse $x : y : \dots : w$ eliminirt werden können. Die Endgleichung

$$\varphi(p, q, r, \dots s) = 0 \quad (3)$$

wird ausser den reciproken Variablen $p, q, \dots s$ (so wollen wir sie fortan nennen) nur noch die Elemente von f enthalten. Ist sie erfüllt, so hat die lineare Gleichung (2) eine Lösungsgemeinschaft erster Ordnung mit der höheren Gleichung (1), und umgekehrt.

Erlauben wir uns den Ausdruck „Lösung“ für irgend eine Reihe von Verhältnissen aller $n + 1$ Variablen $x, y, \dots w$, so haben wir, wenn keine Gleichung vorhanden ist, ∞^n Lösungen. Wir nennen ihre Gesammtheit die vollständige Totalität ∞^n . Fassen wir nun die Gleichung (1) nur als Totalität ihrer ∞^{n-1} Lösungen auf, indem wir von ihrer expliciten Form abstrahiren, und fügen ihr nun $n - 1$ lineare Gleichungen in $x, y, \dots w$ bei, die wir auch nur als Totalitäten aller ihrer Lösungen auffassen: so werden dadurch die n Verhältnisse der Variablen bestimmt, und wir bekommen eine endliche Anzahl m von Lösungen. Dies ist der Grad jener höheren einfach bedingten Totalität ∞^{n-1} . Nennen wir nun lineare Totalitäten ∞^{n-1} solche, welche durch eine einzige lineare Gleichung zwischen $n + 1$ Variablen dargestellt sind, so können wir sagen:

„Eine algebraische Totalität ∞^{n-1} ist eine solche, welche mit $n - 1$ unter sich unabhängigen linearen Totalitäten ∞^{n-1} nur eine endliche Zahl von Lösungen gemein hat. Diese endliche Zahl ist der Grad jener algebraischen Totalität ∞^{n-1} .“

Nennen wir auf der anderen Seite jede Reihe von Verhältnissen der $n + 1$ Elemente $p, q, \dots s$ irgend einer linearen Gleichung $px + qy + \dots + sw = 0$ oder der durch sie dargestellten linearen Totalität ∞^{n-1} eine reciproke Lösung, so gibt es ∞^n reciproke Lösungen. Ihre Gesammtheit heisse die vollständige reciproke Totalität ∞^n . Besteht nun eine Gleichung wie (3), so stellt sie eine einfach bedingte reciproke Totalität ∞^{n-1} dar. Jede Lösung der durch $px + qy + \dots + sw = 0$ dargestellten linearen Totalität ∞^{n-1} beschränkt die Zahl der möglichen reciproken Lösungen $p : q : \dots : w$

und reducirt sie auf ∞^{n-1} . Wir nennen dies eine einfach bedingte reciproke lineare Totalität ∞^{n-1} . Kommen $n-1$ (directe) Lösungen zu der durch (3) dargestellten höheren reciproken Totalität ∞^{n-1} hinzu, so ergibt sich eine endliche Zahl μ reciproker Lösungen $p:q:\dots:s$, welche gleich ist dem Grade von (3). Wenn wir aber nur immer die Bedingung der Lösungsgemeinschaft erster Ordnung festhalten, so dürfen wir die Gleichung (3) auch durch (1) ersetzen. Wir heissen dann die Zahl μ die Classe der durch (1) dargestellten (directen) algebraischen Totalität ∞^{n-1} . Daher die Definition:

„Sind $n-1$ beliebige unter sich unabhängige (directe) Lösungen einer reciproken Lösung (directen linearen Totalität ∞^{n-1}), welche immer eine Lösungsgemeinschaft erster Ordnung mit einer (directen) algebraischen Totalität ∞^{n-1} haben soll, zum voraus gegeben, so heisst Classe dieser letzteren die endliche Anzahl jener reciproken Lösungen.“

Es seien $a_2:b_2:\dots:k_2, \dots, a_n:b_n:\dots:k_n$ die $n-1$ gegebenen Lösungen der reciproken Lösung $p:q:\dots:s$, so bekommen wir die n Gleichungen

$$f(x, y, \dots, w) = 0, \quad a_2 \frac{df}{dx} + b_2 \frac{df}{dy} + \dots + k_2 \frac{df}{dw} = 0, \text{ etc.}, \quad a_n \frac{df}{dx} + b_n \frac{df}{dy} + \dots + k_n \frac{df}{dw} = 0.$$

Die Zahl der Lösungen dieses Systemes ist gleich dem Producte aller Grade; also

$$\mu = m(m-1)^{n-1}.$$

Daher der Satz: Ist m der Grad einer freien algebraischen Totalität ∞^{n-1} , so ist ihre Classe $m(m-1)^{n-1}$.

Die reciproke Lösung $p:q:\dots:w$ ist jetzt bestimmt (wenn gleich nicht in der Einzahl, doch in einer endlichen Zahl). Jede neue hinzugefügte Lösung $a_1:b_1:\dots:k_1$ ist daher nicht mehr ganz frei, sondern einfach bedingt. Wir bekommen dann die zwei äquivalenten Systeme:

$$\begin{array}{l|l} f(x, y, z, \dots, w) = 0, & \varphi(p, q, \dots, s) = 0, \\ a_1 \frac{df}{dx} + b_1 \frac{df}{dy} + \dots + k_1 \frac{df}{dw} = 0, & a_1 p + b_1 q + \dots + k_1 s = 0, \\ a_2 \frac{df}{dx} + b_2 \frac{df}{dy} + \dots + k_2 \frac{df}{dw} = 0, & a_2 p + b_2 q + \dots + k_2 s = 0, \\ \cdot & \cdot \\ a_n \frac{df}{dx} + b_n \frac{df}{dy} + \dots + k_n \frac{df}{dw} = 0, & a_n p + b_n q + \dots + k_n s = 0. \end{array}$$

Da die erste Gleichung des ersten Systemes auch unter der Form

$$x \frac{df}{dx} + y \frac{df}{dy} + \dots + w \frac{df}{dw} = 0$$

dargestellt werden kann, so ist dasselbe unter Anderem auch erfüllt, wenn die Gleichungen

$$\frac{df}{dx} = 0, \quad \frac{df}{dy} = 0, \quad \dots, \quad \frac{df}{dw} = 0$$

es sind. Dies hätte $p = q = \dots = s = 0$ zur Folge, was nicht als Lösung des zweiten Systemes gelten darf. Wir vermeiden diesen Uebelstand, wenn wir das erste System als bestehend aus linearen Gleichungen mit den zu eliminirenden Variablen $\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \dots, \frac{df}{dw}$ ansehen. Seine Resultante wird dann zur Determinante $\Sigma \pm x b_1 c_2 \dots k_n$. Wir dürfen also die Gleichung $f = 0$ durch die lineare Gleichung

$$(a)x + (b)y + \dots + (k)w = 0$$

ersetzen, wo durch die Einklammerung reciproke Elemente der letzterwähnten Determinante bezeichnet sind, wenn man sich darin die oberste Horizontalreihe $x, y, \dots w$ durch $a, b, \dots k$ ersetzt denkt, um Gleichförmigkeit mit der Bezeichnung der übrigen Horizontalreihen zu haben. Dann ist die Resultante U des ersten Systemes in Beziehung auf die Coefficienten $(a), (b), \dots (k)$ der linearen Gleichung vom Grade $(m-1)^n$ und in Beziehung auf die zusammengesetzten Coefficienten einer jeden der übrigen Gleichungen vom Grade $(m-1)^{n-1}$, also in Beziehung auf jede Reihe, wie z. B. $a_1, b_1, \dots k_1$ vom Grade $(m-1)^n + (m-1)^{n-1} = m(m-1)^{n-1}$, und in Beziehung auf die Elemente des Polynoms f vom Grade $n(m-1)^{n-1}$. Die Resultante des zweiten Systemes ist offenbar $\varphi((a), (b), \dots (k))$, also in Beziehung auf jede Reihe wie $a_1, b_1, \dots k_1$ von einem der Classe $m(m-1)^{n-1}$ gleichen Grade, gerade so wie U . Da jeder Lösung des ersten Systemes auch eine des zweiten entspricht, und umgekehrt, so fallen die Resultanten beider Systeme zusammen; also ist

$$U = \varphi((a), (b), \dots (k)).$$

Daher der Satz: Die Classengleichung einer algebraischen einfach bedingten Totalität m ten Grades ist in Beziehung auf ihre Elemente vom $n(m-1)^{n-1}$ ten Grade, wenn die vollständige Totalität ∞^n ist.

Folgende Art, den Grad der Endgleichung (3) sowohl in Beziehung auf die Variablen p, q, r , als auch auf die constanten Elemente zu bestimmen, scheint mir die directeste zu sein.

Man hat aus den $n+2$ Gleichungen

$$\frac{df}{dx} = p\theta^{m-1}, \quad \frac{df}{dy} = q\theta^{m-1}, \quad \dots, \quad \frac{df}{dw} = s\theta^{m-1}, \quad px + qy + \dots + sw = 0$$

die $n+1$ Verhältnisse $x:y:\dots:w:\theta$ zu eliminiren. Die Resultante ist in Beziehung auf die Elemente einer jeden der $n+1$ höheren Gleichungen vom Grade $(m-1)^n$ und in Beziehung auf die Elemente der linearen Gleichung vom Grade $(m-1)^{n+1}$. Ferner ist in jedem Gliede die Summe aller auf irgend eine Variable, z. B. θ , bezüglichen Zeiger gleich $(m-1)^{n+1}$. Nun seien $\lambda, \mu, \dots \pi$ die Grade, welche irgend ein Glied der Resultante in Beziehung auf die Coefficienten $p, q, \dots s$ hat, mit denen θ^{m-1} in den $n+1$ höheren Gleichungen behaftet ist, so ist, da θ in der linearen Gleichung nicht vorkommt, $(\lambda + \mu + \dots + \pi)(\mu - 1)$ die Summe der auf θ bezüglichen Zeiger; folglich

$$\lambda + \mu + \dots + \pi = (m-1)^n.$$

Dies ist also der Grad der Resultante in Beziehung auf alle Grössen $p, q, \dots s$, insofern sie als Coefficienten von θ^{m-1} in den höheren Gleichungen vorkommen. In Beziehung auf dieselben Grössen, insofern sie Elemente der linearen Gleichung sind, ist aber der Grad der Resultante gleich $(m-1)^{n+1}$. Also ist überhaupt $m(m-1)^n$ der Grad der Resultante in Beziehung auf $p, q, \dots s$.

In Beziehung auf die constanten Elemente der einzelnen Polynome $\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \dots \frac{df}{dw}$ ist der Grad der Resultante resp.

$$(m-1)^n - \lambda, (m-1)^n - \mu, \dots, (m-1)^n - \pi,$$

also in Beziehung auf alle constanten Elemente überhaupt

$$(n+1)(m-1)^n - (\lambda + \mu + \dots + \pi) = n(m-1)^n.$$

Es sei nun $x:y:\dots:w:\theta$ irgend eine Lösung des Systemes der $n+1$ höheren Gleichungen, so braucht man nur θ mit irgend einer $(m-1)$ ten Wurzel der positiven Einheit zu multipliciren, ohne $x, y, \dots w$ zu ändern, um wieder eine Lösung desselben Systemes zu erhalten. Alle $(m-1)^{n+1}$ Lösungen ordnen sich daher in Gruppen von je $m-1$ Lösungen, welche die Verhältnisse $x:y:\dots:w$ gemein haben und sich nur durch die Werthe von θ unterscheiden. Da nun die lineare Gleichung θ nicht enthält, so ist

klar, dass, wenn man in dem Ausdruck $\Pi(px + qy + \dots + sw)$ für die Resultante alle vorhin genannten Lösungen substituirt, derselbe die Form der $(m-1)$ ten Potenz einer symmetrischen Function erhalten wird. Setzt man daher die Resultante gleich

$$\{\varphi(p, q, \dots, s)\}^{m-1},$$

so ist die ganze und rationale Function φ in Beziehung auf $p, q, \dots, s$ vom Grade $m(m-1)^{n-1}$ und in Beziehung auf die constanten Elemente vom Grade $n(m-1)^{n-1}$.

Ist die lineare Gleichung $(a)x + (b)y + \dots + (k)w = 0$ erfüllt, so gibt es auch n Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, welche den Gleichungen

$$x = a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 + \dots + a_n \lambda_n, y = b_1 \lambda_1 + b_2 \lambda_2 + \dots + b_n \lambda_n, \text{ etc.}, w = k_1 \lambda_1 + \dots + k_n \lambda_n$$

genügen. Denkt man sich diese Ausdrücke für $x, y, \dots, w$ im Polynom f substituirt, so kommen die n übrigen Gleichungen des ersten Systemes auf

$$\frac{df}{d\lambda_1} = 0, \frac{df}{d\lambda_2} = 0, \dots, \frac{df}{d\lambda_n} = 0$$

zurück. Eliminirt man hier die $n-1$ Verhältnisse $\lambda_1 : \lambda_2 : \dots : \lambda_n$, so wird man wieder die Resultante U bekommen. Es muss dann möglich sein, sie unter die Form $U = \varphi((a), (b), \dots, (k))$ zu bringen. Endlich setze man $p, q, \dots, s$ an die Stelle von $(a), (b), \dots, (k)$, so hat man die Classengleichung $\varphi(p, q, \dots, s) = 0$ gefunden. Die Reduction von U auf jene Form auszuführen, dürfte jedoch nicht geringe Weitläufigkeit der Rechnung verursachen. Es soll daher im Folgenden gezeigt werden, 1. wie man einen Coefficienten von φ für sich berechnen, und 2. wie man alle übrigen Coefficienten durch eine Art von Differentiation daraus ableiten kann.

Wir wollen zuerst den Coefficienten der höchsten Potenz von p in $\varphi(p, q, \dots, s)$ zu bestimmen suchen. Setzen wir daher $A p^x$ als erstes Glied von φ , und, um φ auf dieses einzige zu reduciren, $q=r=\dots=s=0$, so verlangt die Lösung des zweiten Systemes $A=0$, da wir $p=0$ nicht zugeben dürfen. Das erste System kömmt dann auf

$$x=0, \frac{df}{dy}=0, \frac{df}{dz}=0, \dots, \frac{df}{dw}=0$$

zurück. Man sieht hieraus sogleich, dass A die Resultante des Polynoms $f(0, y, z, \dots, w)$ mit nur n Variablen, und als solche untheilbar und in Beziehung auf die ursprünglichen Elemente vom Grade $n(m-1)^{n-1}$ ist. Hierdurch wird die Richtigkeit der obigen Angaben über das Polynom $\varphi(p, q, \dots, s)$ bestätigt. Der folgende Satz wird nun zeigen, wie aus diesem ersten Coefficienten A alle übrigen berechnet werden können.

Wenn im Classenpolynom $\varphi(p, q, \dots, s)$ der Coefficient $[\alpha, \beta, \gamma, \dots, \epsilon]$ des Gliedes $p^\alpha q^\beta r^\gamma \dots s^\epsilon$ in Function der Elemente des ursprünglichen Polynoms $f(x, y, \dots, w)$ bekannt ist, so ist

$$[\alpha-1, \beta+1, \gamma, \dots, \epsilon] = -\frac{1}{\beta+1} \mathfrak{B}[\alpha, \beta, \gamma, \dots, \epsilon],$$

wo die ableitende Operation $\mathfrak{B}$ darin besteht, dass man die Differentiale der ursprünglichen Elemente durch andere ursprüngliche Elemente ersetzt, in denen die auf y bezüglichen Zeiger um 1 vermindert und die auf x bezüglichen um 1 vermehrt sind, und welche (Elemente) ausserdem noch durch die zuletzt genannten vermehrten Zeiger dividirt sind.

Beweis. Setzen wir $x = \alpha x' + \beta y' + \dots + x w'$, $y = \alpha' x' + \beta' y' + \dots + x' w'$, etc., bezeichnen die Determinante der Elemente dieser linearen Substitutionen mit Δ und ihre reciproken Elemente mit $a, b, \dots, a', \dots$, so wird $\frac{df}{dx'} = \alpha \frac{df}{dx} + \alpha' \frac{df}{dy} + \dots$, $\frac{df}{dy'} = \beta \frac{df}{dx} + \beta' \frac{df}{dy} + \dots$, etc., $\frac{df}{dw'} = x \frac{df}{dx} + x' \frac{df}{dy} + \dots$. Wir müssen also gleichzeitig $p' = \alpha p + \alpha' q + \dots$, $q' = \beta p + \beta' q + \dots$, etc., $s' = x p + x' q + \dots$ setzen; daher $\Delta p = a p' + b q' + \dots + k s'$, $\Delta q = a' p' + b' q' + \dots + k' s'$, etc. Führen wir jetzt die Operationszeichen

$$\mathfrak{B} = \alpha \frac{d}{d\beta} + \alpha' \frac{d}{d\beta'} + \dots, \mathfrak{C} = \alpha \frac{d}{d\gamma} + \alpha' \frac{d}{d\gamma'} + \dots, \text{etc.}, \mathfrak{K} = \alpha \frac{d}{dx} + \alpha' \frac{d}{dx'} + \dots$$

ein, und vergegenwärtigen uns die Determinantenform der reciproken Elemente wie

$$a = \begin{vmatrix} \beta' & \beta'' & \dots \\ \gamma' & \gamma'' & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

so finden wir leicht, dass die auf sie ausgeübte Operation $\mathfrak{B}$ in der Ersetzung der Reihe $\beta, \beta', \beta'', \dots$ durch $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots$ besteht und daher das Ergebniss Null liefert, 1. wenn die Reihe $\beta, \beta', \beta'', \dots$ fehlt, 2. wenn diese Reihe zugleich mit der Reihe $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots$ vorhanden ist. Fehlt hingegen die Reihe $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots$, so findet sie sich nach geschehener Operation an der Stelle der Reihe $\beta, \beta', \beta'', \dots$. Da dies einer Vertauschung zweier Zeilen des vollständigen Schema's entspricht, so findet ein Zeichenwechsel Statt. Daher ist $\mathfrak{B}a = -b$, $\mathfrak{B}a' = -b'$, etc. Alle andern reciproken Elemente werden durch die Operation $\mathfrak{B}$ verschwinden gemacht, eben so Δ selbst. Man hat daher

$$\mathfrak{B} = - \left(b \frac{d}{da} + b' \frac{d}{da'} + \dots \right), \mathfrak{C} = - \left(c \frac{d}{da} + c' \frac{d}{da'} + \dots \right), \dots, \mathfrak{K} = - \left(k \frac{d}{da} + k' \frac{d}{da'} + \dots \right).$$

Mittelst dieser Operationszeichen haben wir

$$\Psi = \Delta^\mu \varphi(p, q, \dots s) = p'^\mu e^{-(q' \mathfrak{B} + r' \mathfrak{C} + \dots + s' \mathfrak{K}) : p'} \varphi(a, a', a'', \dots).$$

Also ist irgend ein Glied des transformirten Polynoms

$$(-1)^{\mu-a} \frac{\mathfrak{B}^b}{1.2\dots b} \cdot \frac{\mathfrak{C}^c}{1.2\dots c} \dots \frac{\mathfrak{K}^f}{1.2\dots f} \varphi(a, a', a'', \dots) \times p'^a q'^b r'^c \dots s'^f.$$

$$[a + b + c + \dots + f = \mu].$$

Bezeichnen wir nun irgend einen Coëfficienten des transformirten Polynoms f , dessen Zeiger $\varepsilon, \eta, \theta, \dots$ sind ($\varepsilon + \eta + \theta + \dots = m$), mit $\{\varepsilon, \eta, \theta, \dots\}$, so wissen wir schon aus §. 10, dass

$$\mathfrak{B} \{\varepsilon, \eta, \theta, \dots\} = (\varepsilon + 1) \cdot \{\varepsilon + 1, \eta - 1, \theta, \dots\}, \text{etc.}$$

ist. Nun wird sich die transformirte Classengleichung ebenfalls ergeben, wenn man die transformirten Elemente von f , wie $\{\varepsilon, \eta, \theta, \dots\}$ an die Stelle der ursprünglichen in $\varphi(p, q, \dots s)$ substituirt und gleichzeitig die reciproken Variablen $p, q, \dots s$ mit Accenten versieht. Der so erhaltene Ausdruck werde mit Φ bezeichnet.

Es fragt sich nur noch, ob Φ und Ψ zusammenfallen. Die transformirten Elemente $\{\varepsilon, \eta, \theta, \dots\}$ sind in Beziehung auf $\alpha, \beta, \dots \alpha', \dots$ vom m^{ten} Grade, also ist Φ in derselben Beziehung vom Grade $m \cdot n (m-1)^{n-1}$. Ψ ist in Beziehung auf $\alpha, \alpha', \dots b, \dots$ vom Grade $\mu = m(m-1)^{n-1}$, also in Beziehung auf $\alpha, \beta, \dots \alpha', \dots$ vom Grade $n \cdot m (m-1)^{n-1}$. Folglich sind Φ und Ψ in dieser letzten Beziehung vom selben Grade. Wenn sich also beide Polynome durch constante Factoren unterscheiden, welche die Grössen $\alpha, \beta, \dots \alpha', \dots$ enthielten, so müssten sie in Beziehung auf diese Grössen von

gleichem Grade sein; und zugleich ist klar, dass diese Factoren die ursprünglichen Elemente von f nicht enthalten können. Ferner müssten sie alle Reihen jener Substitutions-Elemente gleichmässig enthalten, damit Vertauschbarkeit jener Reihen ohne Änderung der Ausdrücke möglich wäre. Dies kann aber nicht sein, weil schon der erste Coëfficient von Ψ , nämlich $\varphi(\alpha, \alpha', \alpha'', \dots)$ die Reihe $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots$ nicht enthält. Wenn also Φ und Ψ sich durch einen constanten Factor unterscheiden, so kann dieser nur numerisch sein. Er wird daher bleiben, wie wir auch $\alpha, \beta, \dots, \alpha', \dots$ annehmen mögen. Setzen wir nun $\alpha = \beta' = \gamma'' = \dots = 1$ und lassen alle andern Substitutions-Elemente verschwinden, so hören die Transformations-Formeln auf, solche zu sein, d. h. sie geben die ursprünglichen Polynome wieder. Daher fallen Φ und Ψ gleichzeitig mit φ zusammen, folglich auch mit einander. Sie können sich also, wenn wir den allgemeinen Fall wieder herstellen, auch nicht durch einen numerischen Factor unterscheiden.

Ist nun $A' p'^\mu$ das erste Glied von Φ , so haben wir

$$\Phi = p'^\mu e^{-(q'\mathfrak{B} + r'\mathfrak{C} + \dots + s'\mathfrak{K}) : p'} A',$$

wo man sich unter A' eine ganze Function $n(m-1)^{n-1}$ Grades der transformirten Elemente $\{\varepsilon, \eta, \theta, \dots\}$ zu denken hat. Da wir nun im Stande sind, auf diese Elemente die Operationen $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \dots, \mathfrak{K}$ unmittelbar auszuüben, ohne auf die Substitutions-Elemente zurückgehen zu müssen, so gilt die Formel auch für die nicht transformirten Polynome.

Setzen wir $n = 3$, und betrachten die vier Variablen x, y, z, w als Punkt-Coordinationen im Sinne Plücker's, d. h. als unter sich unabhängige lineare Functionen der gewöhnlichen räumlichen Coordinationen eines Punktes, so stellt jede Lösung einen Punkt dar, die vollständige Totalität ∞^3 wird zur Gesammtheit aller möglichen Punkte oder zum Raume, jede einfach bedingte Totalität ∞^2 zur Fläche und insbesondere eine lineare Totalität ∞^2 zur Ebene, also jede reciproke Lösung $p : q : r : s$ zur Ebene, die vollständige reciproke Totalität ∞^3 zur Gesammtheit aller im Raume vorhandenen Ebenen, die einfach bedingte reciproke Totalität ∞^2 zur Gesammtheit aller eine Fläche umhüllenden Ebenen, die lineare reciproke Totalität ∞^2 zur Gesammtheit aller durch einen Punkt gehenden Ebenen (oder zu diesem Punkte selbst), die reciproken Variablen p, q, r, s endlich werden zu den Flächen-Coordinationen Plücker's. Eine algebraische Totalität ∞^2 wird zur algebraischen Fläche, ihr Grad wird die Zahl von Punkten, die sie mit zweien sich schneidenden Ebenen gemein hat. Eine Ebene, die eine Lösungsgemeinschaft erster Ordnung mit einer Fläche hat, wird zur Berührungsebene. Die Classe einer algebraischen Fläche ist die Zahl ihrer Berührungsebenen, welche durch zwei beliebig gegebene Punkte gehen. Die Classen-Gleichung einer algebraischen Fläche stellt die Beziehung zwischen den Flächen-Coordinationen einer jeden ihrer Berührungsebenen dar; sie zeigt uns also gleichsam die Fläche als Gesammtheit aller ihrer Berührungsebenen. Wir haben somit den Satz: Die Classen-Gleichung einer nach Grad freien algebraischen Fläche m^{ten} Grades ist in Beziehung auf die Flächen-Coordinationen vom $m(m-1)^{2\text{ten}}$ und in Beziehung auf die Elemente der Grades-Gleichung vom $3(m-1)^{2\text{ten}}$ Grade.

Für $n = 2$ wird die vollständige Totalität ∞^2 zur Ebene u. s. f. Der Grad einer algebraischen Curve ist die Zahl von Punkten, in denen sie von irgend einer Geraden geschnitten wird, ihre Classe ist die Zahl ihrer Tangenten, welche durch irgend einen Punkt gehen. Die Classen-Gleichung einer nach Grad freien algebraischen Curve m^{ten} Grades ist in Beziehung auf die Linien-Coordinationen vom $m(m-1)^{\text{ten}}$ und in Beziehung auf die Elemente der Grades-Gleichung vom $2(m-1)^{\text{ten}}$ Grade.

Zum Schlusse dieses §. wollen wir noch die oben beschriebene Construction der Classen-Gleichung auf die freie Curve dritten Grades anwenden. Ihre Gleichung sei

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + 3dx^2y + 3ex^2z + 3fy^2z + 3gxy^2 + 3hxz^2 + 3iyz^2 + 6kxyz = 0.$$

(Schläfli.)

g

Der Coëfficient von p^6 ist die Resultante des Polynoms

$$by^3 + 3fy^2z + 3iyz^2 + cz^3,$$

also gleich

$$4(cf - i^2)(bi - f^2) - (fi - bc)^2 = 6bfic - 4bi^3 - 4cf^3 + 3f^2i^2 - b^2c^2.$$

Die Operationen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ bestehen darin, dass die Differentiale

a	o	o	
$d . e$	resp. in $a . o$	und in $o . a$	übergehen.
$g . k . h$	$2d . e . o$	$o . d . 2e$	
$b . f . i . c$	$3g . 2k . h . o$	$o . g . 2k . 3h$	

Vollführt man die Operationen, so erhält man folgende Classen-Gleichung, worin von jeder Gruppe ähnlicher Glieder immer nur eines gesetzt ist, da die übrigen durch blosse Buchstaben-Vertauschung sich daraus ergeben:

$$\begin{aligned}
 & (6bfic - 4bi^3 - 4cf^3 + 3f^2i^2 - b^2c^2)p^6 + \text{etc.} \\
 & + 6(-3gfic - 2kbic - hbfc + 2gi^3 + 2hbi^2 + 4kf^2c - 2kfi^2 - hf^2i + gbc^2)p^5q + \text{etc.} \\
 & + 3(6dfic + 12gkic + 6ghfc + 2ebic + 4khbc - 4di^3 - 12ghi^2 - 4h^2bi - 4ef^2c - 16k^2fc \\
 & \quad + 2efi^2 + 4k^2i^2 + 8khfi + h^2f^2 - 2dbc^2 - 3g^2c^2)p^4q^2 + \text{etc.} \\
 & + 6(3g^2ic - 2gkfc + 11ghfi + 3h^2bf - 2khbi + 2dbic + 2ebfc + 4k^2bc - 5ghbc - 10gki^2 \\
 & \quad - 10khf^2 - 4ebi^2 - 4df^2c + 2dfi^2 + 2ef^2i + 8k^2fi)p^4qr + \text{etc.} \\
 & + 6(-9dgi^2 + 6g^2hc + 10dkfc - 2egfc - 4gk^2c - 13dhfi - 10gh^2f - abic + 4dhbc - 6ekbc \\
 & \quad + 5ehbi + 2gkhi - 2kh^2b + 4dk^2i + 11eg^2i + 2af^2c + 4ehf^2 + 16k^2hf - afi^2 - 12ekfi \\
 & \quad - 8k^3i)p^3q^2r + \text{etc.} \\
 & + 2(-3afic - 3behc - 18dkic - 18gkhc - 9dhfc - 9giec + 2ai^3 + 2bh^3 + 18dhi^2 + 18gih^2 \\
 & \quad + 24ekfc + 16k^3c - 6eki^2 - 6fkh^2 - 6ehfi - 12k^2hi + abc^2 + 9dgc^2)p^3q^3 + \text{etc.} \\
 & + 6(8dgkc + 8akfi + 8ekhb + 19dghi + 19eghf + 19defi - 5eg^2c - 5d^2fc - 5ahf^2 - 5agi^2 \\
 & \quad - 5dh^2b - 5e^2bi - 4g^2h^2 - 4d^2i^2 - 4e^2f^2 - 18dkhf - 18egki - agfc - debc - ahbi - 4gk^2h \\
 & \quad - 4dk^2i - 4ek^2f + 4akbc + 8k^4)p^2q^2r^2 = 0.
 \end{aligned}$$

Cayley hat im ersten Bande des *Cambridge and Dublin Mathematical Journal* die Classen-Gleichung der Curve dritten Grades ebenfalls gegeben. Sie stimmt aber mit der meinigen nicht überein; und doch halte ich diese für richtig, da ich sie noch durch ein verändertes Verfahren verificirt habe. Ich liess nämlich im Ausdrucke für den Coëfficienten von p^6 die vier numerischen Factoren unbestimmt, und suchte aus diesem durch die Operation $\frac{1}{4}\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2$ den Coëfficienten von $p^2q^2r^2$. Dieser sollte sich durch die Vertauschung von p, q z. B. nicht ändern, was scheinbar sieben lineare Bedingungs-Gleichungen für jene unbestimmten numerischen Factoren gab. Diese kamen indess nur auf zwei unter sich unabhängige Gleichungen zurück, und reichten daher zur Bestimmung der drei unbekannten Verhältnisse jener numerischen Factoren nicht hin. Daher nahm ich noch die Bedingung hinzu, dass der Coëfficient von p^6 verschwinden muss, wenn $f(o, y, z)$ ein Cubus ist; und jetzt konnten jene numerischen Factoren bestimmt werden. Die gefundenen Werthe wurden in den Ausdruck für den Coëfficienten von $p^2q^2r^2$ eingetragen, und das Ergebniss demjenigen der direct von der Kenntniss des Coëfficienten von p^6 ausgehenden Rechnung gleich gefunden.

Ich weiss nicht, ob folgende Bemerkung schon gemacht worden ist. Dass es drei Functionen fünften Grades, $\frac{d\varphi}{dp}, \frac{d\varphi}{dq}, \frac{d\varphi}{dr}$, gibt, welche sich wie x, y, z verhalten, ist bekannt. Es gibt aber auch sechs Functionen vierten Grades in p, q, r und zweiten Grades in Beziehung auf die Elemente des

ursprünglichen Polynoms f , nämlich L, M, N, P, Q, R , welche sich wie $x^2, y^2, z^2, 2yz, 2zx, 2xy$ verhalten. Da somit die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2Lp + Rq + Qr &= 0, \\ Rp + 2Mq + Pr &= 0, \\ Qp + Pq + Nr &= 0, \end{aligned}$$

bestehen, und zwar, weil nur vom fünften Grade, identisch bestehen, so folgt aus denselben leicht, dass

$$\begin{aligned} 4MN - P^2 &= p^2\varphi, & 4NL - Q^2 &= q^2\varphi, & 4LM - R^2 &= r^2\varphi, \\ QR - 2LP &= qr\varphi, & RP - 2MQ &= rp\varphi, & PQ - 2NR &= pq\varphi \end{aligned}$$

ist, wo $\varphi(p, q, r)$ das Polynom der Classen-Gleichung bezeichnet. Endlich ist noch

$$pQR + qRP + rPQ = pqr\varphi.$$

Ogleich die sechs vorigen Ausdrücke in Beziehung auf p, q, r , den achten und der letzte den neunten Grad erreichen, so scheinen sie dennoch wegen ihrer leichten Theilbarkeit brauchbar, um das Polynom φ darzustellen. Ich bemerke noch, dass die Functionen P, Q, R auf folgende Art gefunden werden können. Ist $f(x, y, z)$ das ursprüngliche Polynom, so sei $3df = f_1dx + f_2dy + f_3dz$. In dem Schema

$$\begin{array}{ccc} f_1(o, r, -q) & \cdot & f_1(-r, o, p) & \cdot & f_1(q, -p, o) \\ f_2(o, r, -q) & \cdot & f_2(-r, o, p) & \cdot & f_2(q, -p, o) \\ f_3(o, r, -q) & \cdot & f_3(-r, o, p) & \cdot & f_3(q, -p, o) \end{array}$$

ersetze man nach und nach die erste, zweite, dritte Verticalreihe durch p, q, r , und bilde jedesmal die Determinante, so wird man die Functionen

$$pP, qQ, rR$$

erhalten.

Gibt man der Gleichung der freien Curve dritten Grades die reducirte Form

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3\alpha xyz = 0$$

und lässt θ einen unbestimmten Factor bezeichnen, so muss die Classen-Gleichung durch Elimination von θ, x, y, z aus den Gleichungen

$$\theta p = x^2 - \alpha yz, \quad \theta q = y^2 - \alpha zx, \quad \theta r = z^2 - \alpha xy, \quad px + qy + rz = 0$$

hervorgehen. Substituirt man nun auf der linken Seite der Gleichung

$$(1 - \alpha^3)\theta p \cdot xyz + \theta^2((2\alpha qr - \alpha^2 p^2)x + r^2y + q^2z) = (yz - \alpha^2 x^2)(x^3 + y^3 + z^3 + 3\alpha xyz)$$

die obigen Werthe von $\theta p, \theta q, \theta r$, so wird man die Gleichung identisch richtig finden. Setzt man jetzt abkürzend

$$\frac{(1 - \alpha^3)xyz}{\theta} = w,$$

und lässt die Buchstaben fortschreiten, so gewinnt man folgendes System:

$$\begin{array}{lll} px & + & qy & + & rz = 0, \\ pw + (2\alpha qr - \alpha^2 p^2)x & + & r^2y & + & q^2z = 0, \\ qw & + & r^2x + (2\alpha rp - \alpha^2 q^2)y & + & p^2z = 0, \\ rw & + & q^2x & + & p^2y + (2\alpha pq - \alpha^2 r^2)z = 0. \end{array}$$

Die Elimination von w, x, y, z gibt die Classen-Gleichung

$$(p^3 + q^3 + r^3 - 3\alpha^2 pqr)^2 - 4(1 - \alpha^3)(q^3 r^3 + r^3 p^3 + p^3 q^3 - 3\alpha p^2 q^2 r^2) = 0.$$

Die Anwendung linearer Substitutionen zur gleichzeitigen Zurückführung der Grades- und Classen-Gleichung der Curve auf ihre allgemeinen Formen hat mich auf den im folgenden §. darzustellenden allgemeinen Satz geführt.

§. 29. Ein zur Theorie der Determinanten gehörender Satz.

Es seien $a, b, c, \dots$ n Horizontalreihen von je n Elementen,
 $a', b', c', \dots$
 $a'', b'', c'', \dots$
 $\dots \dots \dots$

alle Elemente seien ebenfalls in Verticalreihen geordnet. Die Verticalreihen werden durch Buchstaben, die Horizontalreihen durch Accente unterschieden. Die Determinante aller Elemente sei Δ . Die reciproken Elemente mögen mit den entsprechenden grossen Buchstaben bezeichnet werden, so dass

$$\Delta = aA + a'A' + \text{etc.} = aA + bB + cC + \dots = \dots$$

ist. (Dann ist bekanntlich $\Sigma \pm AB'C'' \dots = \Delta^{n-1}$). Jetzt soll ein neues Quadrat von Elementen auf folgende Weise gebildet werden. Man schreibe alle Combinationen mit Wiederholungen zur r^{ten} Classe, welche aus den n ursprünglichen Elementen $a, b, c, \dots$ der ersten Horizontalreihe gebildet werden können, in eine Horizontalreihe. Diese wird also $\binom{n+r-1}{r-1} = \binom{n+r-1}{n}$ Elemente enthalten. Man denke sich nun für $a, b, c, \dots$ resp. die linearen n gliedrigen Polynome $at + a't' + a''t'' + \dots, bt + b't' + b''t'' + \dots, \text{etc.}$ gesetzt und sämtliche Combinationen derselben nach den Potenzen und Producten von $t, t', t'', \dots$ entwickelt. Man schreibe diese letzteren in solcher Ordnung in einer Verticalreihe, dass die Folge der Combinationen mit derjenigen in der obersten Horizontalreihe übereinstimmt, wenn t in a, t' in b, t'' in c , u. s. f. übergeht. (Soll die zuerst erwähnte Horizontalreihe die oberste sein, so muss die Reihe ihrer Elemente mit a^r beginnen, und diese ganze Horizontalzeile wird dann der Combination t^r entsprechen.) Die Coëfficienten der Entwicklung jeder Combination der linearen Polynome werden, mit ihren numerischen Factoren versehen, in senkrechter Reihe unter einander geschrieben, so dass jeder Horizontalzeile die betreffende Combination von $t, t', t'', \dots$ zur Seite steht.

$$\begin{array}{c|cccc} t^r & a^r & . & a^{r-1}b & . & . & . \\ t^{r-1}t' & r a^{r-1}a' & . & (r-1)a^{r-2}a'b + a^{r-1}b' & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{array}$$

Die Determinante dieser neuen Elemente sei Ω , so ist Ω in Beziehung auf die ursprünglichen einfachen Elemente vom Grade $r \binom{n+r-1}{r-1} = n \binom{n+r-1}{r}$.

Auf ähnliche Weise verfahre man mit den reciproken Elementen $A, B, C, \dots$, mit dem Unterschiede, dass in Beziehung auf numerische Factoren horizontal und vertical vertauscht werden. Man schreibe nämlich sämtliche Combinationen mit Wiederholungen zur r^{ten} Classe, welche aus $A, A', A'' \dots$ gebildet werden können, in die erste Verticalzeile, und denke sich dann diese Elemente resp. durch die Polynome $Ax + By + Cz + \dots, A'x + B'y + C'z + \dots, \text{etc.}$ ersetzt. Die einzelnen Verticalzeilen sollen dann die Coëfficienten der Combinationen von $x, y, z, \dots$ enthalten.

$$\begin{array}{c|cccc} A & . & rA^{r-1}B & . & . & . \\ A^{r-1}A' & . & (r-1)A^{r-2}A'B + A^{r-1}B' & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{array}$$

Die Determinante dieser Elemente sei Φ , so ist Φ in Beziehung auf die ursprünglichen Elemente $a, b, c, \dots$ vom Grade $n(n-1) \binom{n+r-1}{r-1}$. Nun multiplicire man alle in der ersten Horizontalreihe

von Ω enthaltenen Elemente mit den entsprechenden der ersten Horizontalreihe von Φ und addire die Producte, bilde dann ähnliche Productensummen durch Verbindung der ersten Horizontalreihe in Ω mit der zweiten, dritten, . . . Horizontalreihe in Φ und schreibe alle so erhaltenen Productensummen in eine Horizontalreihe. Eine zweite Horizontalreihe gehe aus der Verbindung der zweiten Horizontalreihe in Ω mit sämtlichen Horizontalreihen in Φ hervor u. s. f., bis jede Horizontalreihe in Ω mit jeder Horizontalreihe in Φ verbunden ist. Dann wird nach einem bekannten Satz die Determinante aller so erhaltenen Productensummen gleich sein dem Producte $\Omega\Phi$ der beiden vorigen Determinanten.

Betrachten wir nun diese Productensummen näher, so ist z. B.

$$a^r \cdot A^r + a^{r-1}b \cdot r A^{r-1}B + \dots = (aA + bB + cC + \dots)^r.$$

Setzt man

$$A' \frac{d}{dA} + B' \frac{d}{dB} + \dots = D' \quad , \quad A'' \frac{d}{dA} + B'' \frac{d}{dB} + \dots = D'',$$

u. s. f., so ist

$$A^\lambda A'^{\lambda'} A''^{\lambda''} \dots = \frac{1 \cdot 2 \dots \lambda}{1 \cdot 2 \dots r} D'^{\lambda'} D''^{\lambda''} \dots A^r \quad , \quad [\lambda + \lambda' + \lambda'' + \dots = r]$$

und da alle Glieder einer und derselben Horizontalreihe durch dieselbe Operation aus den entsprechenden Gliedern der ersten Horizontalreihe hervorgehen,

$$a^r \cdot A^\lambda A'^{\lambda'} A''^{\lambda''} \dots + \text{etc.} = \frac{1 \cdot 2 \dots \lambda}{1 \cdot 2 \dots r} D'^{\lambda'} D''^{\lambda''} \dots (aA + bB + \dots)^r = (aA + bB + \dots)^\lambda (aA' + \dots)^{\lambda'} (aA'' + \dots)^{\lambda''} \dots$$

Um nun auch nach $a, b, \dots$ zu variiren, setze man

$$a' \frac{d}{da} + b' \frac{d}{db} + \dots = \delta' \quad , \quad a'' \frac{d}{da} + \dots = \delta''$$

u. s. f., so ist

$$\frac{r!}{\lambda! \lambda' \lambda'' \dots} a^\lambda a'^{\lambda'} a''^{\lambda''} \dots = \frac{\delta'^{\lambda'}}{\lambda'!} \frac{\delta''^{\lambda''}}{\lambda''!} \dots a^r \quad , \quad [\lambda + \lambda' + \dots = r \quad , \quad r! = 1 \cdot 2 \dots r]$$

und demnach

$$\frac{r!}{\lambda! \lambda' \lambda'' \dots} a^\lambda a'^{\lambda'} a''^{\lambda''} \times A^\mu A'^{\mu'} A''^{\mu''} \dots + \text{etc.} = \frac{\delta'^{\lambda'} \delta''^{\lambda''} \dots}{\lambda'! \lambda''! \dots} (aA + bB + \dots)^\mu (aA' + bB' + \dots)^{\mu'} \dots$$

Das entwickelte Resultat wird ein Aggregat von Producten sein, deren Factoren sämtlich die Form $a^{(p)} A^{(q)} + b^{(p)} B^{(q)} + \dots$ haben werden, wo $(p), (q)$ gleiche oder ungleiche Accente bedeuten.

Sind jetzt $A, B, \dots A', \dots$ die reciproken Elemente zu den ursprünglichen $a, b, \dots$, so reduciren sich alle Factoren von der so eben angeführten Form auf o oder auf Δ , je nachdem die Accente $(p), (q)$ verschieden oder gleich sind. So lange nun die beiden Folgen von Exponenten $\lambda, \lambda', \lambda'', \dots$ und $\mu, \mu', \mu'', \dots$ nicht geradezu coincidiren, kann in dem erwähnten Aggregat kein Product vorkommen, das keinen verschwindenden Factor hätte; das Aggregat muss daher verschwinden. Coincidiren aber die beiden Exponentenfolgen, so gibt es in der Entwicklung von

$$\frac{\delta'^{\lambda'} \delta''^{\lambda''} \dots}{\lambda'! \lambda''! \dots} (aA + bB + \dots)^\lambda (aA' + bB' + \dots)^{\lambda'} (aA'' + bB'' + \dots)^{\lambda''} \dots$$

ein nicht verschwindendes Glied, nämlich

$$(aA + bB + \dots)^\lambda (aA' + bB' + \dots)^{\lambda'} (aA'' + bB'' + \dots)^{\lambda''} \dots = \Delta^r.$$

Von den betrachteten Productensummen haben also alle in der Diagonale des Quadrates liegenden denselben Werth Δ^r , alle ausserhalb liegenden den Nullwerth. Ihre Determinante ist daher

$$\Omega \Phi = \Delta^{r \binom{n+r-1}{r}} = \Delta^{n \binom{n+r-1}{r-1}}.$$

Da aber Δ untheilbar ist, so kann Ω keinen andern Factor als Δ haben, und weil in Beziehung auf die ursprünglichen Elemente $a, b, \dots$ die Functionen Ω und Δ resp. von den Graden n und $n \binom{n+r-1}{r-1}$ sind, so ist

$$\Omega = \Delta \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+r-1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (r-1)}$$

bis auf einen allfälligen numerischen Factor. Um diesen zu finden, setze man die in der Diagonale liegenden ursprünglichen Elemente $a, b', c'', d''', \dots$ der Einheit, alle übrigen aber der Null gleich, so wird $\Delta = 1$. Was dann die zusammengesetzten Elemente r^{ten} Grades betrifft, deren Determinante Ω ist, so wird man sich leicht überzeugen, dass alle in der Diagonale der Einheit, alle ausserhalb der Null gleich werden. Also ist auch $\Omega = 1$. Der gesuchte numerische Factor ist also 1, und die oben aufgestellte Gleichung ohne weiters richtig.

Ueber eine merkwürdige Art, die Classengleichung der Curve dritten Grades zu finden.

Wenn $f(x, y, z) = 0$ die Gleichung einer Curve dritten Grades ist, so wird man die Classengleichung derselben Curve erhalten, indem man die drei Verhältnisse $x : y : z : \sqrt{\theta}$ aus den vier Gleichungen

$$\frac{df}{dx} = p\theta, \quad \frac{df}{dy} = q\theta, \quad \frac{df}{dz} = r\theta, \quad px + qy + rz = 0$$

eliminiert. Cayley (*Cambridge and Dublin Mathematical Journal* t. 1, p. 97) und Hesse (Crelle XXXVI, S. 172) haben gezeigt, wie man aus diesen eine Gleichung ableiten kann, welche sowohl in Beziehung auf x, y, z als auch auf p, q, r homogen und vom zweiten Grade ist. Betrachtet man darin x, y, z als die constanten Coordinaten eines Punktes P der gegebenen Curve dritten Grades und p, q, r als variable Linien-Coordinaten, so ist sie die Classengleichung des Polarkegelschnittes jenes Punktes P . Da dieser Kegelschnitt die ursprüngliche Curve in P berührt, so ist klar, dass seine Classengleichung zugleich mit dem Systeme der obigen vier Gleichungen Statt findet. Multiplicirt man nun die lineare Gleichung des Systemes nach und nach mit x, y, z , so bekommt man im Ganzen sieben Gleichungen, aus denen die sechs Verhältnisse $x^2 : y^2 : z^2 : yz : zx : xy : \theta$ auf lineare Weise eliminiert werden können. Man wird so die gesuchte Classengleichung der ursprünglichen Curve in Form einer Determinante siebenter Ordnung erhalten.

Eine andere Lösung der vorliegenden Aufgabe habe ich in §. 28 meiner Abhandlung über die Resultante gegeben, und dort beiläufig auf die Existenz von sechs Functionen vierten Grades in p, q, r hingewiesen, welche sich wie die Combinationen zweiten Grades der ursprünglichen Variablen x, y, z verhalten, und vermöge dieser Eigenschaft zu einer dritten von der vorigen ganz verschiedenen Darstellung der erwähnten Classengleichung führen. Indem wir nun hierauf näher eingehen, wird sich uns gleichzeitig ein merkwürdiger Beitrag zu der von Hesse und Aronhold bearbeiteten Theorie der Wendungspunkte der Curven dritten Grades ergeben.

§. 1. Der leichteren Darstellung wegen fassen wir die Aufgabe zuerst etwas allgemeiner, wie folgt:

Es sind drei homogene quadratische Polynome f_1, f_2, f_3 , der drei Variablen x, y, z gegeben, und es soll $xf_1 + yf_2 + zf_3 = 0$ sein. Man verlangt eine Gleichung, welche keine andern Variablen, als die Verhältnisse jener Polynome, enthält.

Aus dem Systeme der vier Gleichungen

$$\begin{aligned} f_1 &= \theta p, \quad f_2 = \theta q, \quad f_3 = \theta r, \quad (1) \\ px + qy + rz &= 0 \quad (2) \end{aligned}$$

sind die drei Verhältnisse $x : y : z : \sqrt{\theta}$ zu eliminiren. Die Resultante wird die Form $\{F(p, q, r)\}^2$ haben, wo F eine Function sechsten Grades in Beziehung auf die Variablen p, q, r und vierten Grades in Beziehung auf die constanten Elemente bezeichnet. Wir setzen daher einfach

$$F(p, q, r) = 0$$

als Endgleichung hin. Wenn wir jetzt mittelst der linearen Gleichung (2) aus den drei quadratischen (1) z. B. die Variable x eliminiren, so erhalten wir drei Gleichungen, welche nur y^2, yz, z^2, θ enthalten und in Beziehung auf diese Grössen homogen und linear sind. Sie reichen also gerade hin, um uns, nachdem wir sie als lineare Gleichungen aufgelöst haben, die drei Verhältnisse $y^2 : yz : z^2 : \theta$ zu liefern. Wir bekommen also für das Verhältniss $y : z$ zwei Ausdrücke. Werden diese einander gleich gesetzt, so muss die linke Seite der reducirten Gleichung das Polynom der gesuchten Classen-Gleichung als Factor enthalten.

Es möge f irgend eines der gegebenen quadratischen Polynome und ω die entsprechende unter den Variablen p, q, r bedeuten, so wird durch das genannte Verfahren

$$p^2 f(x, y, z) = f(-qy - rz, py, pz) = \theta p^2 \omega.$$

Definiren wir nun die Operationszeichen p, q, r durch die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ p & q & r \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = \alpha p + \beta q + \gamma r,$$

so haben wir

$$f(-qy - rz, py, pz) = \frac{1}{2}(zq - yr)^2 f.$$

Wir bekommen so im Ganzen folgende drei Systeme von je drei Gleichungen:

$$(zq - yr)^2 f = 2\theta p^2 \omega, \quad (xr - zp)^2 f = 2\theta q^2 \omega, \quad (yp - xq)^2 f = 2\theta r^2 \omega,$$

und, wenn wir jedes derselben wie ein System linearer Gleichungen behandeln,

$$\begin{aligned} 2\theta p^2 : z^2 : 2yz : y^2 &= (qq, qr, rr) : (\omega, qr, rr) : - (qq, \omega, rr) : (qq, qr, \omega), \\ 2\theta q^2 : x^2 : 2xz : z^2 &= (rr, pr, pp) : (\omega, pr, pp) : - (rr, \omega, pp) : (rr, pr, \omega), \\ 2\theta r^2 : y^2 : 2xy : x^2 &= (pp, pq, qq) : (\omega, pq, qq) : - (pp, \omega, qq) : (pp, pq, \omega), \end{aligned}$$

wo der Kürze wegen

$$(qq, qr, rr) = \Sigma \pm qqf_1 \cdot qrf_2 \cdot rrf_3, \text{ etc.}$$

gesetzt ist. Die zwölf hier vorkommenden Determinanten können aber auf sieben ganze Functionen zurückgeführt werden. Da nämlich

$$pp + qq + rr = 0$$

st, so folgt

$$r(qq, qr, rr) = (qq, -q(pp + qa), (pp + qa)^2) = p^3(qq, -pq, pp),$$

oder

$$(qq, qr, rr) : (pp, pq, qq) = p^3 : r^3.$$

Die zwei Polynome sechsten Grades auf der linken Seite dieser Proportion sind also resp. durch p^3 und r^3 theilbar. Wir dürfen daher setzen:

$$(qq, qr, rr) = 8p^3\Psi, (rr, pr, pp) = 8q^3\Psi, (pp, pq, qq) = 8r^3\Psi$$

und $\Psi(p, q, r)$ wird eine ganze Function dritten Grades in p, q, r sein, die in Beziehung auf die ursprünglichen Elemente ebenfalls vom dritten Grade ist. Es gelte nun die Gleichung

$$f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2exz + 2fxy$$

symbolisch für alle drei gegebenen Polynome, indem man die Elemente nur mit den untern Zeigern 1, 2, 3 zu versehen braucht, um die einzelnen Polynome zu unterscheiden. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}ppf &= br^2 - 2dqr + cq^2, & \frac{1}{2}qrf &= -aqr + epq + fpr - dp^2, \\ \frac{1}{2}qqf &= cp^2 - 2ep r + ar^2, & \frac{1}{2}prf &= -brp + fqr + dpq - eq^2, \\ \frac{1}{2}rrf &= aq^2 - 2fpq + bp^2, & \frac{1}{2}pqf &= -cpq + dpr + eqr - fr^2. \end{aligned}$$

Aus dieser Uebersicht wird klar, dass in den Determinanten (ω, qr, rr) und $-(qq, \omega, rr)$ resp. die mit c und d bezeichneten Elemente fehlen. Wenn daher symbolisch

$$\omega \frac{d}{dc} = p \frac{d}{dc_1} + q \frac{d}{dc_2} + r \frac{d}{dc_3}, \text{ etc.}$$

gesetzt wird, so ist

$$\omega \frac{d}{dc} (qq, qr, rr) = 2p^2(\omega, qr, rr), \quad \omega \frac{d}{dd} (qq, qr, rr) = -2p^2(qq, \omega, rr),$$

also

$$(\omega, qr, rr) = 4p \cdot \omega \frac{d\Psi}{dc}, \quad -(qq, \omega, rr) = 4p \cdot \omega \frac{d\Psi}{dd}.$$

Setzen wir jetzt der Kürze wegen

$$L = \omega \frac{d\Psi}{da}, \quad M = \omega \frac{d\Psi}{db}, \quad N = \omega \frac{d\Psi}{dc}, \quad P = \omega \frac{d\Psi}{dd}, \quad Q = \omega \frac{d\Psi}{de}, \quad R = \omega \frac{d\Psi}{df},$$

so sind diese sechs Polynome in Beziehung auf p, q, r vom vierten und in Beziehung auf die constanten Elemente vom zweiten Grade. Wir können nun leicht die drei obigen Reihen von gleichen Verhältnissen auf eine einzige Reihe zurück bringen. Es ist

$$\theta : x^2 : y^2 : z^2 : 2yz : 2zx : 2xy = \Psi : L : M : N : P : Q : R. \quad (3)$$

Wir kennen nun drei Reihen von Polynomen vierten Grades in p, q, r , die mit den Variablen x, y, z proportional sind. Substituiren wir dieselben in der Gleichung $px + qy + rz = 0$, so erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} 2Lp + Rq + Qr &= 0, \\ Rp + 2Mq + Pr &= 0, \\ Qp + Pq + 2Nr &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Diese Gleichungen müssen alle identisch sein; denn sonst hätten wir eine Endgleichung vom fünften Grade, während sie doch nothwendig vom sechsten ist. Man kann übrigens die identische Gültigkeit auch direct beweisen, indem man wiederum die obigen Determinanten an die Stelle der $L, R, \dots$ zurück bringt und dann eine der Operationen p, q, r mittelst der Gleichung $pp + qq + rr = 0$ eliminiert. Betrachten wir aber nur die explicite vorhandenen p, q, r als die Variablen und die Functionen $2L, R, \dots$ als die Elemente des Systemes, so schliessen wir, dass je drei auf eine Horizontalreihe fallende reciproke Elemente mit p, q, r proportional sind, woraus leicht folgt, dass alle sechs reciproken Elemente

mit $p^2, q^2, r^2, qr, rp, pq$ proportional und daher durch eben diese Grössen theilbar sind. Wir setzen demnach:

$$\begin{cases} 4 MN - P^2 = p^2 F, & QR - 2LP = qrF, \\ 4 NL - Q^2 = q^2 F, & RP - 2MQ = rpF, \\ 4 LM - R^2 = r^2 F, & PQ - 2NR = pqF, \end{cases} \quad (5)$$

wo F eine ganze Function sechsten Grades in p, q, r und vierten Grades in Beziehung auf die ursprünglichen Elemente bezeichnet. Es ist klar, dass alle diese Gleichungen identische sind, so gut als die Gleichungen des vorigen Systemes (4), aus dem sie geschlossen wurden. Bedenken wir jetzt, dass die Coëfficienten in den drei linearen Gleichungen (4) mit x, y, z proportional sind, und heben hiedurch die gegenseitige Unabhängigkeit von p, q, r wieder auf, so müssen alle sechs zuletzt angeführten reciproken Elemente verschwinden, was offenbar nur geschehen kann, indem

$$F(p, q, r) = 0$$

wird. Ist diese Gleichung nicht identisch, sondern wird durch sie wirklich eine Abhängigkeit zwischen p, q, r gesetzt, so kann sie nichts anderes als die gesuchte Endgleichung sein. (Wäre sie aber identisch, so würde daraus folgen

$$L = \lambda^2, \quad M = \mu^2, \quad N = \nu^2, \quad P = 2\mu\nu, \quad Q = 2\nu\lambda, \quad R = 2\lambda\mu,$$

wo λ, μ, ν ganze Functionen zweiten Grades bezeichnen, und ferner

$$\lambda p + \mu q + \nu r = 0$$

eine identische Gleichung. Eine solche ist aber nur möglich, indem

$$\lambda = \alpha qr, \quad \mu = \beta rp, \quad \nu = \gamma pq, \quad \alpha + \beta + \gamma = 0$$

ist. Man hätte also

$$x : y : z = \frac{\alpha}{p} : \frac{\beta}{q} : \frac{\gamma}{r}.$$

Es ist nun leicht einzusehen, dass das ursprüngliche System (1), (2) keine solche Lösung haben kann.)

Wenn man L aus den Gleichungen

$$QR - 2LP = qrF, \quad 2Lp + Rq + Qr = 0$$

eliminiert, so ergibt sich

$$pQR + qRP + rPQ = pqrF.$$

Dies ist die in §. 28 meiner Abhandlung über die Resultante gegebene Formel.

Aus dem Früheren ergibt sich leicht

$$\frac{1}{8} (pp, qq, rr) = -2pqr\Psi,$$

oder

$$\begin{vmatrix} f_1(o, r, -q) \cdot f_1(-r, o, p) \cdot f_1(q, -p, o) \\ f_2(o, r, -q) \cdot f_2(-r, o, p) \cdot f_2(q, -p, o) \\ f_3(o, r, -q) \cdot f_3(-r, o, p) \cdot f_3(q, -p, o) \end{vmatrix} = -2pqr\Psi.$$

Es bleibt uns noch übrig, die Bedeutung der Function Ψ zu untersuchen. Ist zugleich mit dem Systeme (1), (2) auch die Gleichung $\Psi(p, q, r) = 0$ erfüllt, sind also die zwei Verhältnisse $p : q : r$ durch die zwei Gleichungen $F = 0, \Psi = 0$ bestimmt, so würde aus den Proportionen (3) $\theta = 0$ folgen, wenn eine der sechs Functionen $L, \dots$ von Null verschieden wäre; und da das Verschwinden aller ursprünglichen Variablen $\sqrt{\theta}, x, y, z$ nicht als Lösung des Systemes (1), (2) gelten darf, so müsste die Resultante der Gleichungen $f_1 = 0, f_2 = 0, f_3 = 0$ verschwinden. Da wir aber eine solche Beschrän-

kung der Allgemeinheit der Polynome f_1, f_2, f_3 nicht vorausgesetzt haben, so bleibt uns nichts anderes übrig, als alle sechs Functionen $L, \dots$ verschwinden zu lassen. Daher der Satz:

Wenn die zwei Verhältnisse $p : q : r$ durch die Gleichungen $F = 0, \Psi = 0$ bestimmt sind, so genügen sie den sechs Gleichungen $L = 0, M = 0, N = 0, P = 0, Q = 0, R = 0$.

Noch mehr. Wir brauchen nur eine der Gleichungen (5) zu differentiiren, um einzusehen, dass alsdann auch die drei ersten Differential-Coëfficienten von F verschwinden. Wir schliessen hieraus, dass die achtzehn Lösungen des Systemes $F = 0, \Psi = 0$ paarweise zusammenfallen. Es gibt also nur neun verschiedene Lösungen.

Die Function Ψ hat noch eine andere Bedeutung. Ersetzen wir nämlich das System (1), (2) durch Folgendes:

$$D = x' \frac{d}{dx} + y' \frac{d}{dy} + z' \frac{d}{dz},$$

$$\frac{1}{2} D f_1 = \theta p, \quad \frac{1}{2} D f_2 = \theta q, \quad \frac{1}{2} D f_3 = \theta r, \quad (6)$$

$$p x + q y + r z = 0, \quad p x' + q y' + r z' = 0, \quad (7)$$

und eliminiren mittelst der Gleichungen (7) z. B. x und x' aus den Gleichungen (6), so bekommen wir, ähnlich wie oben, ein System von drei Gleichungen

$$(z q - y r) (z' q - y' r) f = 2 \theta p^2 \omega,$$

und indem wir von hier aus ganz denselben Weg befolgen, gelangen wir zu den Proportionen

$$\begin{aligned} \theta : x x' : y y' : z z' : (y z' - y' z) : (z x' - x z') : (x y' - x' y) \\ = \Psi : L : M : N : P : Q : R \end{aligned} \quad (8).$$

Die identischen Gleichungen (4) und (5) werden ihre Geltung behalten. Aber, da das System der fünf Gleichungen (6) und (7) nur gerade hinreicht, um die fünf Verhältnisse $x : y : z, x' : y' : z', \theta : x'$ zu bestimmen, so bleiben p, q, r frei, und F wird im Allgemeinen nicht verschwinden. Daher werden auch, wenn wir $\Psi = 0$ setzen, die sechs Functionen L, M, N, P, Q, R nicht verschwinden, und wir bekommen $\theta = 0$. Also ist Ψ die Resultante der fünf Gleichungen

$$\frac{1}{2} D f_1 = 0, \quad \frac{1}{2} D f_2 = 0, \quad \frac{1}{2} D f_3 = 0, \quad p x + q y + r z = 0, \quad p x' + q y' + r z' = 0.$$

Bedeutend α, β, γ willkürliche Factoren, so sind die durch die Coordinaten x, y, z und x', y', z' bestimmten Punkte P, P' ein gemeinschaftliches Paar harmonischer Pole aller in der durch die Gleichung

$$\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 = 0$$

dargestellten Doppelschaar enthaltenen Kegelschnitte, und p, q, r sind die Linien-Coordinaten der dieses Polenpaar verbindenden Geraden PP' . Es ist bekannt, dass beide Punkte P, P' sich auf einer und derselben Curve dritten Grades bewegen, deren Gleichung

$$\varphi = \Sigma \pm \frac{df_1}{dx} \frac{df_2}{dy} \frac{df_3}{dz} = 0$$

ist. Also stellt die Gleichung $\Psi = 0$ die Curve dritter Classe dar, welche von allen durch die Polenpaare eines und desselben Systemes (es gibt deren drei) gelegten Geraden PP' umhüllt wird. Es ist dies dieselbe Curve, welche von Hesse in Crelle XXXVIII, S. 250—256 betrachtet wird. Dort ist ihre Gleichung aus der reducirten Form des Polynoms φ , wo alle sechs Combinationen, wie $x^2 y$, wegfallen, hergeleitet. Hier aber haben wir Ψ ohne irgend eine besondere Annahme hinsichtlich der Polynome f_1, f_2, f_3 gefunden.

§. 2. Als Vorbereitung auf das Folgende legen wir uns die Determinante

$$\Omega = ((\alpha p + \beta q + \gamma r)^2, (\alpha p + \beta q + \gamma r)(\alpha' p + \beta' q + \gamma' r), (\alpha' p + \beta' q + \gamma' r)^2)$$

zur Reduction vor. Wir setzen

$$\begin{array}{l} \alpha p + \beta q + \gamma r = D, \\ \alpha' p + \beta' q + \gamma' r = D', \\ p p + q q + r r = o, \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Determin.} = \Pi, \text{ reciproke Elemente der zwei ersten Horizontalzeilen} \\ \left\{ \begin{array}{l} a \cdot b \cdot c \\ a' \cdot b' \cdot c' \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

Dann ist

$$\Pi p = a D + a' D', \quad \Pi q = b D + b' D', \quad \Pi r = c D + c' D',$$

also

$$\begin{aligned} \Pi^6(qq, qr, rr) &= ((bD + b'D')^2, (bD + b'D')(cD + c'D'), (cD + c'D')^2) \\ &= \left\| \begin{array}{ccc} b^2 & bc & c^2 \\ 2bb' & bc' + b'c & 2cc' \\ b'^2 & b'c' & c'^2 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{ccc} D^2 f_1 & D^2 f_2 & D^2 f_3 \\ DD' f_1 & DD' f_2 & DD' f_3 \\ D'^2 f_1 & D'^2 f_2 & D'^2 f_3 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} b^2 & bc & c^2 \\ 2bb' & bc' + b'c & 2cc' \\ b'^2 & b'c' & c'^2 \end{array} \right\| \times \Omega. \end{aligned}$$

Die Determinante, welche hier als Factor von Ω erscheint, ist aber nach §. 29 meiner Abhandlung über die Resultante identisch mit

$$\left| \begin{array}{cc} b \cdot c & \\ b' \cdot c' \end{array} \right|^3 = (\Pi p)^3.$$

Daher verwandelt sich die letzte Gleichung in

$$\Pi^6 \cdot 8p^3 \Psi = (\Pi p)^3 \cdot \Omega;$$

folglich ist

$$\Omega = 8 \left| \begin{array}{ccc} \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \\ \alpha' \cdot \beta' \cdot \gamma' \\ p \cdot q \cdot r \end{array} \right|^3 \cdot \Psi(p, q, r) \quad (9).$$

Es gibt eine ganze Reihe solcher Gleichungen. Wir wollen uns aber nicht dabei aufhalten, sondern jetzt den Einfluss untersuchen, den lineare Substitutionen auf die Gestaltung der Function Ψ ausüben.

Das ursprüngliche System gehe durch die linearen Substitutionen

$$t = \lambda x + \mu y + \nu z, \quad t' = \lambda' x + \mu' y + \nu' z, \quad t'' = \lambda'' x + \mu'' y + \nu'' z,$$

aus einem andern Systeme

$$\varphi(t, t', t'') = \theta u, \quad \varphi' = \theta u', \quad \varphi'' = \theta u'', \quad tu + t'u' + t''u'' = o$$

hervor, wo $\varphi, \varphi', \varphi''$ ebenfalls homogene ganze Functionen zweiten Grades der Variablen t, t', t'' bezeichnen. Es sei ferner $\Psi(u, u', u'')$ für dieses System dasselbe, was Ψ für das ursprüngliche war, und die Operationszeichen $\delta, \delta', \delta''$ seien durch die Gleichung

$$\left| \begin{array}{ccc} \frac{d}{dt} & \frac{d}{dt'} & \frac{d}{dt''} \\ u & u' & u'' \\ \varepsilon & \varepsilon' & \varepsilon'' \end{array} \right| = \varepsilon \delta + \varepsilon' \delta' + \varepsilon'' \delta''$$

definirt. Die Determinante der Substitutions-Elemente sei Λ , und die reciproken Elemente seien $l, m, n, l', \dots$.

Dann ist

$$\begin{array}{l} p = \lambda u + \lambda' u' + \lambda'' u'' \\ q = \mu u + \mu' u' + \mu'' u'' \\ r = \nu u + \nu' u' + \nu'' u'' \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \Lambda u = l p + m q + n r \\ \Lambda u' = l' p + m' q + n' r \\ \Lambda u'' = l'' p + m'' q + n'' r \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} f_1 = \lambda \varphi + \lambda' \varphi' + \lambda'' \varphi'' \\ f_2 = \mu \varphi + \mu' \varphi' + \mu'' \varphi'' \\ f_3 = \nu \varphi + \nu' \varphi' + \nu'' \varphi'' \end{array} \right|$$

Es ist nun leicht einzusehen, dass

$$(qq, qr, rr) = \Lambda \cdot \Sigma \pm qq\varphi \cdot qr\varphi' \cdot rr\varphi''$$

ist. Da aber $q = m\delta + m'\delta' + m''\delta''$, $r = n\delta + n'\delta' + n''\delta''$ ist, so folgt aus (9)

$$\Sigma \pm q q \varphi \cdot q r \varphi' \cdot r r \varphi'' = 8 \begin{vmatrix} m & m' & m'' \\ n & n' & n'' \\ u & u' & u'' \end{vmatrix} {}^3\Psi(u, u', u'').$$

Aber

$$\Sigma \pm m n' u'' = \Lambda p,$$

folglich zuletzt

$$\Psi(p, q, r) = \Lambda^4 \cdot \Psi(u, u', u''),$$

oder auch

$$\Psi(p, q, r) = \Lambda \cdot \psi(lp + mq + nr, l'p + m'q + n'r, l''p + m''q + n''r).$$

Gebrauchen wir nun die Taylor'sche Formel, um die rechte Seite dieser Gleichung nach den fallenden Potenzen von p zu entwickeln, und führen dafür die Operationszeichen

$$m = \lambda \frac{d}{d\mu} + \lambda' \frac{d}{d\mu'} + \lambda'' \frac{d}{d\mu''} = - \left(m \frac{d}{dt} + m' \frac{d}{dt'} + m'' \frac{d}{dt''} \right), \quad n = \Sigma \lambda \frac{d}{d\mu}$$

ein, so erhalten wir, unter Berücksichtigung von $m\Lambda = 0$, $n\Lambda = 0$,

$$\Psi(p, q, r) = e^{-(qm + rn)p} \Psi(p, 0, 0).$$

Wir haben nur noch nachzuweisen, dass die Operationen m und n auch ohne Kenntniss der Substitutions-Elemente ausgeführt werden können.

Es seien

$$\lambda \frac{d}{dt} + \lambda' \frac{d}{dt'} + \lambda'' \frac{d}{dt''} = L, \quad \mu \frac{d}{dt} + \dots = M, \quad \nu \frac{d}{dt} + \dots = N$$

drei neue Operationszeichen, so ist

$$f_1(x, y, z) = \frac{1}{2} (xL + yM + zN)^2 (\lambda\varphi + \lambda'\varphi' + \lambda''\varphi''), \text{ etc.}$$

Ferner seien T, U, V irgend drei verschiedene Combinationen zweiten Grades der Operationszeichen L, M, N , so werden alle Coëfficienten von $\Psi(p, q, r)$, als Functionen der Elemente des andern Systemes und derjenigen der Substitutionen betrachtet, die Form

$$\Sigma \pm T(\lambda\varphi + \lambda'\varphi' + \lambda''\varphi'') \cdot U(\mu\varphi + \mu'\varphi' + \mu''\varphi'') \cdot V(\nu\varphi + \nu'\varphi' + \nu''\varphi'') = \Lambda \cdot \Sigma \pm T\varphi \cdot U\varphi' \cdot V\varphi''$$

haben. Uebt man nun auf einen solchen Coëfficienten in Ψ z. B. die Operation m aus, so sind wegen $m\Lambda = 0$ nur die Symbole T, U, V zu differentiiren. Tragen wir dies auf seine links vom Gleichheitszeichen stehende Form $\Sigma \pm T f_1 \cdot U f_2 \cdot V f_3$, zurück, und betrachten da z. B. f_2 explicite als lineare Function von μ, μ', μ'' und quadratische von t, t', t'' , so brauchen wir die Operation m nicht auf die explicite vorhandenen μ, μ', μ'' , sondern nur auf die Symbole T, U, V auszuüben. Obschon also eigentlich z. B.

$$m(Tf_2) = Tf_1 + \mu mT\varphi + \mu' mT\varphi' + \mu'' mT\varphi''$$

wäre, so werden wir doch das erste Glied Tf_1 weglassen und nur $(mT)f_2$ setzen. Nun ist Tf_2 ein Element von $f_2(x, y, z)$ und $(mT)f_2$ ein anderes desselben Polynoms, worin der auf y bezügliche Zeiger um 1 vermindert, und der auf x bezügliche um 1 vermehrt ist, multiplicirt mit dem anfänglichen auf y bezüglichen Zeiger. Drücken wir, um dies ganz deutlich zu machen, irgend ein Glied eines der drei ursprünglichen Polynome f durch

$$\frac{2!}{\alpha! \beta! \gamma!} \{\alpha, \beta, \gamma\} x^\alpha y^\beta z^\gamma, \quad [\alpha + \beta + \gamma = 2]$$

aus, so ist

$$\{\alpha, \beta, \gamma\} = \frac{1}{2} L^\alpha M^\beta N^\gamma f, \quad \text{und} \quad m\{\alpha, \beta, \gamma\} = \beta \cdot \frac{1}{2} L^{\alpha+1} M^{\beta-1} N^\gamma f = \beta \cdot \{\alpha+1, \beta-1, \gamma\}.$$

Für $q=o$, $r=o$ ist nun

$$q=p \frac{d}{dz}, \quad r=-p \frac{d}{dy};$$

folglich

$$8p^3 \Psi(p, o, o) = p^6 \left(\frac{d^2}{dz^2}, -\frac{d^2}{dy dz}, \frac{d^2}{dy^2} \right) = p^6 \left(\frac{d^2}{dy^2}, \frac{d^2}{dy dz}, \frac{d^2}{dz^2} \right),$$

also

$$\Psi(p, o, o) = p^3 \Sigma \pm b_1 d_2 c_3 = b d c p^3,$$

wenn $b d c$ als symbolische Bezeichnung einer Determinante gilt. Die Function $\Psi(p, q, r)$ ist also endlich durch folgende symbolische Formeln definiert:

$$m = a \frac{d}{df} + 2f \frac{d}{db} + e \frac{d}{da}, \quad n = a \frac{d}{de} + f \frac{d}{dd} + 2e \frac{d}{dc},$$

$$\Psi(p, q, r) = p^3 \cdot e^{-(q m + r n)} \cdot b d c.$$

Führt man die Rechnung aus und behält der Kürze wegen die symbolische Bezeichnung der Determinanten bei, so erhält man

$$\Psi = b d c p^3 - (2 a d e + c f a) q^2 r + (2 a d f + b e a) q r^2 + (4 d e f - a b c) p q r \left. \begin{array}{l} + c e a q^3 - (2 b e f + a d b) r^2 p + (2 b e d + c f b) r p^2 \\ + a f b r^3 - (2 c f d + b e c) p^2 q + (2 c f e + a d c) p q^2 \end{array} \right\},$$

$$L = c e \omega \cdot q^3 - (2 \omega d e + c f \omega) q^2 r + (2 \omega d f + b e \omega) q r^2 - \omega b c \cdot p q r \left. \begin{array}{l} + \omega f b \cdot r^3 - \omega d b \cdot r^2 p + \omega d c \cdot p q^2 \end{array} \right\}, \text{ etc.}$$

$$P = b \omega c \cdot p^3 - 2 a \omega e \cdot q^2 r - a \omega b \cdot r^2 p - 2 c f \omega \cdot p^2 q + 4 \omega e f \cdot p q r \left. \begin{array}{l} + 2 a \omega f \cdot q r^2 + 2 b e \omega \cdot r p^2 + a \omega c \cdot p q^2 \end{array} \right\}, \text{ etc.}$$

Es seien $\rho, \rho', \rho'', \sigma, \sigma', \sigma''$ Polynome vierten Grades in u, u', u'' von derselben Bedeutung im zweiten Systeme, wie L, M, N, P, Q, R im ursprünglichen, so dass

$$\theta : t^2 : t'^2 : t''^2 : 2 t t' : 2 t' t'' : 2 t t'' = \psi : \rho : \rho' : \rho'' : \sigma : \sigma' : \sigma''$$

wird, so ist

$$L = \Lambda^2 (l^2 \rho + l'^2 \rho' + l''^2 \rho'' + l l' \sigma + l l' \sigma' + l l' \sigma''), \text{ etc.}$$

$$P = \Lambda^2 (2 m n \rho + 2 m' n' \rho' + 2 m'' n'' \rho'' + (m' n'' + m'' n') \sigma + (m'' n + m' n') \sigma' + (m n' + m' n) \sigma''), \text{ etc.}$$

$$2 \lambda L + \mu R + \nu Q = \Lambda^3 (2 l \rho + l' \sigma' + l'' \sigma''), \text{ etc.},$$

$$F(p, q, r) = \Lambda^6 \Phi(u, u', u''),$$

wenn Φ die Resultante des zweiten Systemes bezeichnet; also

$$F(p, q, r) = p^6 \cdot e^{-(q m + r n)} \cdot \Phi(l, l', l'').$$

Aber $\Phi(l, l', l'') = F(p, o, o) : p^6$ ist die Resultante der Gleichungen

$$b_2 y^2 + 2 d_2 y z + c_2 z^2 = o, \quad b_3 y^2 + 2 d_3 y z + c_3 z^2 = o.$$

Soll völlige Uebereinstimmung mit den Formeln (5) Statt finden, so muss man

$$4 (d_2 c_3 - d_3 c_2) (b_2 d_3 - b_3 d_2) - (b_2 c_3 - b_3 c_2)^2$$

als Coefficient von p^6 in F annehmen. Aus diesem können dann alle übrigen Coefficienten mittelst der Operationen m, n berechnet werden. Aber dann afficiren diese nicht bloss die Zeiger der ursprünglichen Elemente, wie es oben bei der Entwicklung von Ψ der Fall war, sondern auch den Rang. Es ist z. B.

$$m f_2 = a_2 + f_1, \quad m b_2 = 2 f_2 + b_1, \quad m d_2 = e_2 + d_1, \\ m a_2 = a_1, \quad m e_2 = e_1, \quad m c_2 = c_1,$$

dagegen einfach

$$m f_1 = a_1, \text{ etc. }, m a_1 = 0, \text{ etc. },$$

ebenso

$$n e_3 = a_3 + e_1, \text{ u. s. f. }$$

§. 3. Es seien jetzt $3f_1, 3f_2, 3f_3$ die nach den Variablen x, y, z genommenen Differential-Coëfficienten des Polynoms f der allgemeinen Gleichung einer Curve dritten Grades. Dann ist $F(p, q, r) = 0$ die Classengleichung derselben Curve, und da $p dx + q dy + r dz = 0$ ist, so wird wegen $px + qy + rz = 0$ auch $x dp + y dq + z dr = 0$. Denkt man sich für x, y, z die mit diesen Variablen proportionalen Functionen von p, q, r gesetzt, so ist $x dp + y dq + z dr = 0$ die Differential-Gleichung der ursprünglichen Curve in Beziehung auf ihre Classe. Sie hat die drei Formen

$$2L dp + R dq + Q dr = 0, \quad R dp + 2M dq + P dr = 0, \quad Q dp + P dq + 2N dr = 0. \quad (a)$$

Diese Differential-Gleichung wird, wie wir gesehen haben, mit Null identisch, wenn die Verhältnisse $p : q : r$ den zwei Gleichungen $F = 0, \Psi = 0$ genügen. Durch diesen Umstand sind vielfache Tangenten der ursprünglichen Curve angezeigt. Da die Curve dritten Grades keine Doppeltangenten hat, so sind es ihre Wendungs-Tangenten. Hieraus folgt der Satz:

Die durch die Gleichung $\Psi(p, q, r) = 0$ dargestellte Curve dritter Classe wird von sämtlichen Wendungs-Tangenten der ursprünglichen Curve dritten Grades berührt. Sie ist übrigens durch diese neun Tangenten hinreichend bestimmt, wie wir unten zeigen werden.

Wir müssen ferner schliessen, dass, wenn p, q, r den Gleichungen $F = 0, \Psi = 0$ genügen, aber dp, dq, dr unter sich unabhängig sind, die Ausdrücke zweiter Ordnung, wie

$$2dL \cdot dp + dR \cdot dq + dQ \cdot dr,$$

Quadrate sind. Ein directer Beweis hievon ist zu wünschen.

Wir lassen hier noch eine andere Aufgabe ungelöst. Die Gleichung $F = 0$ ist nämlich nur ein particuläres Integral der Gleichungen (a). Man kann aber von jeder derselben das allgemeine Integral verlangen. Wenn f die reducirte Form hat, so ist es leicht, die drei allgemeinen Integrale der Gleichungen (a) zu finden. Aber es scheint nicht möglich, von da auf die allgemeinen Integrale, welche der vollständigen Form von f entsprechen, zurück zu gehen.

Theils um schon Gesagtes zu verificiren, theils um auf den letzten §. vorzubereiten, setzen wir unbeschadet der Freiheit der ursprünglichen Curve dritten Grades, die reducirte Form ihrer Gleichung

$$f = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 0$$

voraus. Werfen wir dann, um die früheren allgemeinen Formeln anwenden zu können, einen Blick auf das Schema

	a	b	c	d	e	f
x	1	0	0	x	0	0
y	0	1	0	0	x	0
z	0	0	1	0	0	x

so bekommen wir

$$\Psi = -x(p^3 + q^3 + r^3) - (1 - 4x^3)pqr,$$

$$\begin{array}{l|l} L = -p^2qr - 2xp(q^3 + r^3) - 4x^2q^2r^2, & P = p(q^3 + r^3 - p^3) + 4xq^2r^2 + 4x^2p^2qr, \\ M = -pq^2r - 2xq(r^3 + p^3) - 4x^2r^2p^2, & Q = q(r^3 + p^3 - q^3) + 4xr^2p^2 + 4x^2pq^2r, \\ N = -pqr^2 - 2xr(p^3 + q^3) - 4x^2p^2q^2, & R = r(p^3 + q^3 - r^3) + 4xp^2q^2 + 4x^2pqr^2, \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 F &= -p^6 - q^6 - r^6 + 2(1 + 16x^3)(q^3r^3 + r^3p^3 + p^3q^3) + 24x^2pqr(p^3 + q^3 + r^3) + 24x(1 + 2x^3)p^2q^2r^2 \\
 &= 4(1 + 8x^3)(q^3r^3 + r^3p^3 + p^3q^3 + 6x^2p^2q^2r^2) - (p^3 + q^3 + r^3 - 12x^2pqr)^2 \\
 &= 4(1 + 8x^3)(qr + 2xp^2)^3 - (q^3 + r^3 - (1 + 16x^3)p^3 - 12x^2pqr)^2 \\
 &= 4(1 + 8x^3)(rp + 2xq^2)^3 - (r^3 + p^3 - (1 + 16x^3)q^3 - 12x^2pqr)^2 \\
 &= 4(1 + 8x^3)(pq + 2xr^2)^3 - (p^3 + q^3 - (1 + 16x^3)r^3 - 12x^2pqr)^2.
 \end{aligned}$$

Die drei letzten Formen von F lassen die Wendungs-Tangenten erkennen. Bleiben wir bei der ersten Form, so haben die zwei Gleichungen

$$qr + 2xp^2 = 0, \quad q^3 + r^3 - (1 + 16x^3)p^3 - 12x^2pqr = 0$$

die sechs Lösungen

$$\begin{aligned}
 p : q : r &= 1 : 1 : -2x, \quad = i : i^2 : -2x, \quad = i^2 : i : -2x, \\
 &= 1 : -2x : 1, \quad = i : -2x : i^2, \quad = i^2 : -2x : i,
 \end{aligned}$$

wo i die imaginäre Kubikwurzel der positiven Einheit bezeichnet. Die Wendepunkte selbst ergeben sich durch Differentiation der zweiten Gleichung aus den Proportionen

$$x : y : z = (-(1 + 16x^3)p^2 - 4x^2qr) : (q^2 - 4x^2pr) : (r^2 - 4x^2pq).$$

Durch Substitution der vorigen Lösungen erhält man

$$\begin{aligned}
 x : y : z &= -1 : 1 : 0, \quad = -i^2 : i : 0, \quad = -i : i^2 : 0, \\
 &= -1 : 0 : 1, \quad = -i^2 : 0 : i, \quad = -i : 0 : i^2.
 \end{aligned}$$

Die sechs hierher gehörenden Wendepunkte sind also durch die zwei Systeme

$$\left\{ \begin{array}{l} x^3 + y^3 = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} \text{ und } \left\{ \begin{array}{l} x^3 + z^3 = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\}$$

bestimmt.

Combiniren wir die Gleichungen $F=0$, $\Psi=0$, so bekommen wir

$$x^2F + \Psi^2 + 2(1 + 8x^3)pqr\Psi = (1 + 8x^3)\{4x^2(q^3r^3 + r^3p^3 + p^3q^3) - (1 - 16x^3)p^2q^2r^2\} = 0.$$

Wir dürfen also setzen:

$$pqr = -2x, \quad p^3 + q^3 + r^3 = 2 - 8x^3, \quad q^3r^3 + r^3p^3 + p^3q^3 = 1 - 16x^3.$$

Dann sind p^3, q^3, r^3 die Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - (2 - 8x^3)x^2 + (1 - 16x^3)x + 8x^3 = (x - 1)^2(x + 8x^3) = 0.$$

Man kann also setzen

$$p = -8x^3, \quad q^3 = 1, \quad r^3 = 1,$$

mit Permutationen, also im Ganzen sechs Systeme, wovon je zwei coincidiren. Setzt man $p = -2x$, so wird $qr = 1$. Man hat also

$$p : q : r = -2x : 1 : 1, \quad = -2x : i : i^2, \quad = -2x : i^2 : i,$$

im Ganzen nur neun verschiedene Lösungen. Von den achtzehn Lösungen des Systemes $F=0$, $\Psi=0$ fallen also je zwei zusammen. Dies wird dadurch bestätigt, dass die Differential-Gleichung erster Ordnung von $F=0$ identisch wird. Das System ist nämlich vermöge dieses Umstandes auch noch erfüllt, wenn die Variabeln Incremente erster Ordnung erhalten, welche der Gleichung $d\Psi=0$ genügen. Für $p : q : r = -2x : 1 : 1$ wird diese Differential-Gleichung $dp + x dq + x dr = 0$.

Substituirt man irgend eine der obigen neun Lösungen in den sechs Polynomen $L, M, \dots$, so verschwinden alle, wie oben vorausgesagt wurde.

Wir wollen jetzt eine der drei Differential-Gleichungen (a), welche durch $F = 0$ befriedigt werden, z. B. die erste

$$2Ldp + Rdq + Qdr = 0$$

direct integrieren. Da $2Lp + Rq + Qr = 0$ ist, so muss die Integral-Function vom 0^{ten} Grade sein. Man findet

$$2Ldp + Rdq + Qdr = \frac{2}{3} (qr + 2xp^2)^{5/2} d \frac{q^3 + r^3 - (1 + 16x^3)p^3 - 12x^2pqr}{(qr + 2xp^2)^{3/2}}.$$

Die durch die Gleichung $\Psi = 0$ dargestellte Curve dritter Classe ist durch die neun Wendungstangenten der ursprünglichen Curve dritten Grades, welche sie berühren soll, völlig bestimmt. Denn, wenn man eine kubische Gleichung mit unbestimmten Coëfficienten hinsetzt und für p, q, r nach und nach die von den obigen neun Lösungen gelieferten Werthe substituirt, so findet man als Werth der Determinante neunter Ordnung, welche dem gesuchten Coëfficienten von p^3 entspricht,

$$\sqrt{-3^9 \cdot 2x \cdot (1 + 8x^3)^6}.$$

Also sind die neun Gleichungen, welche zur Bestimmung der Coëfficienten dienen sollen, sämtlich von einander unabhängig.

§. 4. Die Function Ψ steht noch in einer andern merkwürdigen Beziehung zur Theorie der Wendepunkte der Curven dritten Grades. Da nämlich die Gleichung $\Psi(p, q, r) = 0$ durch die neun Wendungstangenten befriedigt wird, so ist klar, dass, wenn nun für p, q, r die abgeleiteten Polynome f_1, f_2, f_3 substituirt werden, die sich ergebende Gleichung sechsten Grades in x, y, z durch die neun Wendepunkte ebenfalls muss befriedigt werden. Es tritt aber noch der merkwürdige Umstand hinzu, dass diese Gleichung in zwei Gleichungen dritten Grades zerfällt, und somit zwei neue Curven dritten Grades darstellt, von denen jede ihre Wendepunkte mit der ursprünglichen Curve gemein hat. Um diese Eigenschaft der Function Ψ noch bestimmter anzugeben, nennen wir $f(x, y, z)$ das ursprünglich gegebene Polynom dritten Grades, setzen

$$df = 3(f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz)$$

und

$$\varphi = \frac{1}{8} \Sigma \pm \frac{df_1}{dx} \frac{df_2}{dy} \frac{df_3}{dz} = \frac{1}{216} \nabla f,$$

wo ∇ das Zeichen einer Functional-Determinante ist. Dann ist identischer Weise

$$-\Psi(f_1, f_2, f_3) = \alpha f^2 + \varphi^2, \quad (1)$$

wo α eine bekannte Function vierten Grades der ursprünglichen Elemente bezeichnet, nämlich dieselbe, welche in der Hesse'schen Formel

$$\frac{1}{2} \nabla \varphi = 4\alpha^2 f + \beta \varphi \quad (2)$$

vorkömmt, wo wiederum β eine ganze Function sechsten Grades derselben ursprünglichen Elemente bezeichnet. Die Constanten α und β dienen dann ferner zur Bestimmung des Factors λ , welcher das Polynom $\lambda f + \varphi$ in drei lineare Factoren zerlegbar macht. Werden nämlich die Wurzeln der Gleichung

$$(x + 4\alpha)^3 = 64\alpha^3 + \beta^2$$

mit $\gamma, \gamma', \gamma''$ bezeichnet, so ist

$$-6\lambda = \sqrt{\gamma} + \sqrt{\gamma'} + \sqrt{\gamma''},$$

wo man die Vorzeichen der Quadratwurzeln so zu nehmen hat, dass ihr Product gleich β wird. Unsere Formel (1) kann somit zur numerischen Berechnung von α gebraucht werden und gewährt hierin einen

Vortheil vor der Formel (2), welche das Vorzeichen von α unsicher lässt. Man könnte zwar diesem Uebelstande durch Berechnung der Resultante $\rho = 64\alpha^3 + \beta^2$ des Polynoms f begegnen; indess scheint mir dieses schwieriger als die Anwendung der Formel (1).

Um diese zu beweisen, wählen wir die reducirte Form des Polynoms f und setzen wie oben $f = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz$. Dann haben wir in

$$\Psi = -x(f_1^3 + f_2^3 + f_3^3) - (1 - 4x^3)f_1f_2f_3$$

die Gleichungen

$$f_1 = x^2 + 2xyz, \quad f_2 = y^2 + 2zxx, \quad f_3 = z^2 + 2zxy$$

zu substituieren und bekommen

$$\Psi = -x(\Sigma x^3)^2 + (-10x^2 + 16x^5)xyz\Sigma x^3 + (-1 - 40x^3 + 32x^6)x^2y^2z^2.$$

Vergleichen wir hiemit die Quadrate der Polynome f und

$$\varphi = -x^2(x^3 + y^3 + z^3) + (1 + 2x^3)xyz,$$

so finden wir

$$\Psi + x(1 - x^3)f^2 + \varphi^2 = 0.$$

Wir haben ferner

$$\frac{1}{2}\nabla\varphi = 4x^2(1 - x^3)^2f + (1 - 20x^3 - 8x^6)\varphi.$$

Die Formel (1) ist somit für die reducirte Form verificirt. Es ist zugleich

$$1 - 20x^3 - 8x^6 = (1 - 2x - 2x^2)(1 - 2xi - 2x^2i^2)(1 - 2xi^2 - 2x^2i),$$

$$64x^3(1 - x^3)^3 + (1 - 20x^3 - 8x^6)^2 = (1 + 8x^3)^3$$

= der Resultante von f , wie in §. 17, III, der Abhandlung über die Resultante gezeigt worden ist. Endlich ist

$$f + x^2\varphi$$

in die linearen Factoren x, y, z zerlegbar. Setzen wir nun $t, t', t'', u, u', u'', \bar{\varphi}, \psi$ an die Stelle von $x, y, z, p, q, r, \varphi, \Psi$, indem wir die letzteren Zeichen für die allgemeine Form der ursprünglichen Gleichung gebrauchen, und lassen die obigen linearen Substitutionen eintreten, so wird

$$\varphi = \Lambda^2\bar{\varphi}, \quad \nabla\varphi = \Lambda^8\nabla\bar{\varphi}, \quad \Psi = \Lambda^4\psi,$$

die Resultante von f wird

$$\rho = \Lambda^{12}(1 + 8x^3)^3.$$

Die zuerst aufgestellten Formeln sind also richtig, wenn wir

$$\alpha = \Lambda^4x(1 - x^3), \quad \beta = \Lambda^6(1 - 20x^3 - 8x^6), \quad \lambda = \Lambda^2x^2,$$

$$\sqrt{\gamma} = \Lambda^2(1 - 2x - 2x^2), \quad \sqrt{\gamma'} = \Lambda^2(i - 2xi - 2x^2), \quad \sqrt{\gamma''} = \Lambda^2(i^2 - 2xi - 2x^2)$$

annehmen.

Ich schliesse mit einer Bemerkung, die sich an das zu Ende von §. 1 Gesagte anknüpft. Wenn für f die reducirte Form vorausgesetzt wird, und man nennt $x, y, z; x', y', z'$ die Coordinaten eines auf der Curve $\varphi = 0$ liegenden Punktenpaares, in welchem dieselbe von der Tangente (p, q, r) der Curve $\psi = 0$ geschnitten wird, x'', y'', z'' die Coordinaten des dritten Durchschnittspunktes, so sind diese, wenn man die jenes Punktenpaares als bekannt voraussetzt, durch die zwei Gleichungen

$$px'' + qy'' + rz'' = 0, \quad xx'x'' + yy'y'' + zz'z'' = 0$$

bestimmt. Sieht man in der zweiten Gleichung nur x'', y'', z'' als variabel an, so stellt sie ebenfalls eine Tangente der Curve $\psi = 0$ dar. Denn es ist

$$\psi(x x', y y', z z') = 0.$$

Dass übrigens der Berührungspunkt der ersten Tangente (p, q, r) dem dritten Durchschnittspunkt in Beziehung auf die gepaarten Durchschnittspunkte harmonisch zugeordnet ist, ist geometrisch leicht ersichtlich.

Fortsetzung der Abhandlung über eine merkwürdige Art, die Classengleichung einer Curve dritten Grades zu finden.

Wir haben oben die Function Ψ nicht rein, sondern mit p^3 , etc., pqr multiplicirt, in Form einer Determinante dritter Ordnung dargestellt und dann die Function F aus Ψ hergeleitet, wobei wir ebenfalls nur Ausdrücke für $p^2 F, \dots, qr F, \dots$, aber nicht für die reine Function F bekamen. Wir wollen nun die reine Function Ψ unmittelbar in Form einer symmetrischen Determinante sechster Ordnung, und F zwar mittelbar, aber ebenfalls in der symmetrischen Form einer Determinante vierter Ordnung darstellen, deren Elemente zum Theil die zweiten Differential-Coëfficienten einer Determinante V von übereinstimmender Form sind. Dies ist der eine Zweck dieser Fortsetzung. Der andere ist, den merkwürdigen Zusammenhang nachzuweisen, welcher zwischen den Functionen Ψ, F und den aus der Theorie der Wendungspunkte der Curven dritten Grades bekannten Superdeterminanten vierten und sechsten Grades, die wir oben mit α und β bezeichnet haben, besteht.

§. 1. Das Polynom F unter der Form einer Determinante vierter Ordnung.

Es sei $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2ezx + 2fxy = 0$ die Gleichung eines Kegelschnittes, $px + qy + rz = 0$ diejenige einer Tangente desselben und w eine neue Variable, so bestehen die vier Gleichungen

$$\begin{aligned} px + qy + rz &= 0, \\ pw + ax + fy + ez &= 0, \\ qw + fx + by + dz &= 0, \\ rw + ex + dy + cz &= 0. \end{aligned}$$

Eliminirt man aus diesen die drei Verhältnisse $w : x : y : z$, so erhält man

$$-\begin{vmatrix} \cdot & p & q & r \\ p & a & f & e \\ q & f & b & d \\ r & e & d & c \end{vmatrix} = (bc - d^2)p^2 + \dots + 2(e f - ad)qr + \dots = 0$$

als Classengleichung des Kegelschnittes.

Nun sei $f(x, y, z) = 0$ die Gleichung einer Curve dritten Grades,

$$-\frac{1}{3} df = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz, \quad \frac{1}{2} df_1 = f_{11} dx + f_{12} dy + f_{13} dz, \text{ etc.}$$

Dann stellt die Gleichung

$$f_{11} x'^2 + f_{22} y'^2 + f_{33} z'^2 + 2f_{23} y' z' + 2f_{31} z' x' + 2f_{12} x' y' = 0,$$

wenn darin x, y, z als Coordinaten eines festen Pols P und x', y', z' als variable Coordinaten gedacht werden, den Polarkegelschnitt von P in Beziehung auf die Curve (f) dar. Setzen wir nun

$$p x' + q y' + r z' = 0$$

als Gleichung einer Tangente dieses Kegelschnittes, so wird

$$V = - \begin{vmatrix} \cdot & p & q & r \\ p & f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ q & f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ r & f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad (a)$$

die Classengleichung dieses Kegelschnittes. Sie ist aber nicht nur in Beziehung auf die Linienkoordinaten p, q, r , sondern auch in Beziehung auf die Coordinaten x, y, z des Poles P vom zweiten Grade. Wenn wir daher jetzt p, q, r als constant und x, y, z als variabel denken, so gibt dieselbe Gleichung $V=0$ wieder ein Kegelschnitt (V) als Ort des Poles P , dessen Polare fortwährend die feste Gerade (p, q, r) berührt. Ist nun diese eine Tangente der ursprünglichen Curve (f), so geht der Ortskegelschnitt (V) durch ihren Berührungspunkt und wird von ihr hier ebenfalls berührt. Also auch umgekehrt: wenn die feste Gerade (p, q, r) den ihr entsprechenden Ortskegelschnitt (V) berührt, so ist sie eine Tangente der ursprünglichen Curve (f). Wenn wir daher in der Classengleichung des Ortskegelschnittes die variablen Linienkoordinaten mit den constanten p, q, r zusammenfallen lassen, so bekommen wir eine Bedingung für eine Tangente der ursprünglichen Curve (f). Also ist

$$F(p, q, r) = - \begin{vmatrix} \cdot & p & q & r \\ p & \frac{d^2 V}{dx^2} & \frac{d^2 V}{dx dy} & \frac{d^2 V}{dx dz} \\ q & \frac{d^2 V}{dy dx} & \frac{d^2 V}{dy^2} & \frac{d^2 V}{dy dz} \\ r & \frac{d^2 V}{dz dx} & \frac{d^2 V}{dz dy} & \frac{d^2 V}{dz^2} \end{vmatrix} = 0 \quad (b)$$

die Classengleichung der ursprünglichen Curve. Die analytische Herleitung dieses Ausdruckes für F wird zeigen, dass kein numerischer Factor beizufügen ist.

Um den Gang des Beweises nicht durch eine Digression zu unterbrechen, unterliessen wir es, die Behauptung zu begründen, dass, wenn die feste Gerade (p, q, r) die ursprüngliche Curve im Punkte (x, y, z) berühre, auch der Ortskegelschnitt (V) Tangente und Berührungspunkt gemein habe. Obschon dies für die geometrische Anschauung klar genug wird, wenn man den Pol P ein Element der ursprünglichen Curve durchlaufen lässt, so wollen wir es doch noch durch die analytische Betrachtung der Gleichung $V=0$ verificiren. Es seien x, y, z die Coordinaten des Punktes Q , in welchem die feste Gerade (p, q, r) die ursprüngliche Curve berührt, folglich $p : q : r = f_1 : f_2 : f_3$, ferner $x + h x', y + h y', z + h z'$ die Coordinaten eines Punktes P der Curve (V). Wir denken uns in der Gleichung $V=0$ die Grössen p, q, r durch f_1, f_2, f_3 ersetzt, multipliciren die drei letzten Verticalzeilen resp. mit x, y, z und subtrahiren ihre Summe von der ersten Verticalzeile und wiederholen dann dieselbe Operation in Beziehung auf die Horizontalzeilen, so fallen aus der Function V die von h freien Glieder weg, und wir dürfen h als verschwindend annehmen. Vernachlässigen wir dann die Glieder in h^2, h^3 , etc., so erhalten wir für den Punkt P

$$V = h(x' f_1 + y' f_2 + z' f_3) \varphi = 0,$$

wo φ die Functional-Determinante von f bezeichnet. Wenn also der Punkt Q nicht zugleich auf der Curve $\varphi = 0$ liegt, d. h. wenn er kein Wendungspunkt der ursprünglichen Curve ist, so ist

$$(x + h x') f_1 + (y + h y') f_2 + (z + h z') f_3 = h(x' f_1 + y' f_2 + z' f_3)$$

eine Grösse von der Ordnung h^2 , d. h. wenn der Abstand QP von der ersten Ordnung ist, so weicht P nur um eine Grösse zweiter Ordnung von der Geraden (p, q, r) ab. Diese wird also vom Kegelschnitt (V) in Q berührt.

Es mag noch bemerkt werden, dass die Functional-Determinante von V gleich $2\Psi^2$ ist. Wenn also der Kegelschnitt (V) aus zwei Geraden bestehen soll, so muss die entsprechende feste Gerade (p, q, r) zwei zugeordnete Pole, die der ganzen Doppelschaar von Polarkegelschnitten der ursprünglichen Curve gemeinsam sind, verbinden. Bekanntlich liegen diese zugeordneten Pole auf der Curve $\varphi = 0$. Die in denselben an diese Curve gezogenen Tangenten machen dann zusammen den Kegelschnitt (V) aus.

Der Kegelschnitt (V) berührt die Curve $\varphi = 0$ in den drei Punkten, welche in Beziehung auf die ursprüngliche Curve zugeordnete Pole sind zu den drei anderen Punkten, in denen die Gerade (p, q, r) die Curve φ schneidet. Dies hat Hesse (Crelle XXXVI, S. 164) gezeigt.

Wir wollen nun die Formel (b) auf rein analytischem Wege aus denen im ersten Theile dieser Abhandlung herleiten. Es war dort

$$4rL = (\omega, pp, pq).$$

Wenn man nun das vollständige Schema der Determinante hinschreibt und die Operationszeichen p, q nur einmal explicite schreibt, z. B. $pf_1 = 2(rf_{12} - qf_{13})$, $qf_1 = 2(pf_{13} - rf_{11})$, so erhält man

$$rL = \begin{vmatrix} p \cdot rpf_{12} - qpf_{13} & ppf_{13} - rpf_{11} \\ q \cdot rpf_{22} - qpf_{23} & ppf_{23} - rpf_{21} \\ r \cdot rpf_{32} - qpf_{33} & ppf_{33} - rpf_{31} \end{vmatrix},$$

und wenn man diese Determinante, nach Art der Multiplication zusammengesetzter Grössen, in Determinanten mit einfachen Verticalzeilen entwickelt, so bemerkt man, dass diese sich zu einer Determinante vierter Ordnung zusammensetzen, nämlich

$$L = - \begin{vmatrix} \cdot & p & q & r \\ p & pf_{11} & pf_{12} & pf_{13} \\ q & pf_{21} & pf_{22} & pf_{23} \\ r & pf_{31} & pf_{32} & pf_{33} \end{vmatrix},$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichung (a),

$$L = \frac{1}{2} ppV.$$

Ferner war oben

$$4pP = (\omega, qq, rr),$$

also

$$pP = |\omega \cdot pqf_{13} - rpf_{11} \cdot qrf_{11} - prf_{12}|,$$

wo die rechte Seite die Determinante bedeutet, deren drei Horizontalzeilen sich ergeben, indem man zuerst $\omega = p$, $i = 1$, dann $\omega = q$, $i = 2$, und endlich $\omega = r$, $i = 3$ setzt. Die Zerlegung in Determinanten mit einfachen Verticalzeilen gibt

$$pP = pq|\omega \cdot qf_{13} \cdot rf_{11}| - p^2|\omega \cdot qf_{13} \cdot rf_{12}| \\ - qr|\omega \cdot qf_{11} \cdot rf_{11}| + pr|\omega \cdot qf_{11} \cdot rf_{12}|.$$

Wir haben es zunächst mit der Verwandlung des dritten Gliedes auf der rechten Seite zu thun. Da überhaupt $pp + qq + rr = 0$ ist, so hat man

$$-qqf_{11} = ppf_{11} + rrf_{11},$$

folglich

$$-qr|\omega \cdot qf_{11} \cdot rf_{11}| = r|\omega \cdot ppf_{11} + rrf_{11} \cdot rf_{11}| = pr|\omega \cdot pf_{11} \cdot rf_{11}|.$$

Da nun überhaupt $p \frac{d}{dx} + q \frac{d}{dy} + r \frac{d}{dz} = 0$ ist, so folgt

$$pf_{11} = -qf_{12} - rf_{13},$$

also

$$r|\omega \cdot pf_{i1} \cdot rf_{i1}| = -r|\omega \cdot qf_{i2} \cdot rf_{i1}| - r|\omega \cdot rf_{i3} \cdot rf_{i1}|.$$

Es ist aber $qf_i = pf_{i3} - rf_{i1}$, daher $-r rf_{i1} = q rf_i - p rf_{i3}$, und

$$-r|\omega \cdot rf_{i3} \cdot rf_{i1}| = |\omega \cdot rf_{i3} \cdot q rf_i - p rf_{i3}| = |\omega \cdot rf_{i3} \cdot q rf_i| = |\omega \cdot rf_{i3} \cdot q qf_{i1} - p qf_{i2}|,$$

also endlich jenes dritte Glied

$$-qr|\omega \cdot qf_{i1} \cdot rf_{i1}| = -pr|\omega \cdot qf_{i2} \cdot rf_{i1}| + pq|\omega \cdot rf_{i3} \cdot qf_{i1}| - p^2|\omega \cdot rf_{i3} \cdot qf_{i2}|,$$

und daher

$$\begin{aligned} P &= p(|\omega \cdot rf_{i2} \cdot qf_{i3}| + |\omega \cdot qf_{i2} \cdot rf_{i3}|) \\ &\quad + q(|rf_{i1} \cdot \omega \cdot qf_{i3}| + |qf_{i1} \cdot \omega \cdot rf_{i3}|) \\ &\quad + r(|qf_{i1} \cdot rf_{i2} \cdot \omega| + |rf_{i1} \cdot qf_{i2} \cdot \omega|) \\ &= qrV. \end{aligned}$$

Man hat also die Ausdrücke

$$L = \frac{1}{2} ppV, \quad M = \frac{1}{2} qqV, \quad N = \frac{1}{2} rrV, \quad P = qrV, \quad Q = rpV, \quad R = pqV,$$

und

$$p\Psi = \frac{1}{2} f_1(p, q, r) V, \quad q\Psi = \frac{1}{2} f_2(p, q, r) V, \quad r\Psi = \frac{1}{2} f_3(p, q, r) V.$$

Es war nun oben unter Anderem auch $p^2 F = 4MN - P^2$, also

$$p^2 F = \begin{vmatrix} qqV & qrV \\ rqV & rrV \end{vmatrix}.$$

Wenn aber S, T irgend zwei Functionen von x, y, z bezeichnen, so ist

$$\begin{vmatrix} qS & qT \\ rS & rT \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -r & q \\ 0 & -p \\ p & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{dS}{dx} & \frac{dT}{dx} \\ \frac{dS}{dy} & \frac{dT}{dy} \\ \frac{dS}{dz} & \frac{dT}{dz} \end{vmatrix} = p \begin{vmatrix} p & \frac{dS}{dx} & \frac{dT}{dx} \\ q & \frac{dS}{dy} & \frac{dT}{dy} \\ r & \frac{dS}{dz} & \frac{dT}{dz} \end{vmatrix}.$$

Es sei nun $S = qV, T = rV$, so ist z. B.

$$\begin{vmatrix} \frac{dS}{dy} & \frac{dT}{dy} \\ \frac{dS}{dz} & \frac{dT}{dz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q \frac{dV}{dy} & q \frac{dV}{dz} \\ r \frac{dV}{dy} & r \frac{dV}{dz} \end{vmatrix} = p \begin{vmatrix} p & V_{21} & V_{31} \\ q & V_{22} & V_{32} \\ r & V_{23} & V_{33} \end{vmatrix},$$

wo z. B. abkürzend $\frac{d^2 V}{dx dy} = V_{12}$ gesetzt ist. Hieraus ergibt sich nun leicht

$$F = - \begin{vmatrix} p & q & r \\ p & V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ q & V_{21} & V_{22} & V_{23} \\ r & V_{31} & V_{32} & V_{33} \end{vmatrix}.$$

§. 2. Die Function Ψ in Form einer Determinante sechster Ordnung.

Setzen wir abkürzend

$$x'f_{11} + y'f_{12} + z'f_{13} = f_1(xx'), \text{ etc.},$$

so ist $\Psi = 0$ die Endgleichung des Systemes der fünf Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} f_1(xx') &= 0, \quad f_2(xx') = 0, \quad f_3(xx') = 0, \\ s &= px + qy + rz = 0, \quad s' = px' + qy' + rz' = 0, \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

wenn darin die vier Verhältnisse $x:y:z, x':y':z'$ eliminirt werden. Man kann aber auch die sechs Gleichungen

$$\begin{aligned} f_1(xx') &= 0, \quad f_2(xx') = 0, \quad f_3(xx') = 0, \\ sx' + s'x &= 0, \quad sy' + s'y = 0, \quad sz' + s'z = 0 \end{aligned}$$

in Beziehung auf die sechs Grössen $xx', yy', zz', yz' + y'z, zx' + z'x, xy' + x'y$ als linear behandeln und wird so Ψ in Form einer Determinante sechster Ordnung erhalten. Setzen wir

$$f = ax^3 + 3dx^2y + 3ex^2z + 3gxy^2 + 6kxyz + 3hxx^2 + by^3 + 3fy^2z + 3iyx^2 + cz^3,$$

so ist

$$2\Psi = \begin{vmatrix} 2p & . & . & . & r & q \\ . & 2q & . & r & . & p \\ . & . & 2r & q & p & . \\ a & g & h & k & e & d \\ d & b & i & f & k & g \\ e & f & c & i & h & k \end{vmatrix},$$

und, wenn a, b, c, d, e, f beliebige Grössen bezeichnen,

$$2(La + Mb + Nc + Pd + Qe + Rf)$$

$$= - \begin{vmatrix} . & a & b & c & d & e & f \\ . & 2p & . & . & . & r & q \\ . & . & 2q & . & r & . & p \\ . & . & . & 2r & q & p & . \\ p & a & g & h & k & e & d \\ q & d & b & i & f & k & g \\ r & e & f & c & i & h & k \end{vmatrix}.$$

Auf dem gegenwärtigen Standpunkte können die Eigenschaften der Function Ψ in Beziehung auf lineare Transformation noch leichter nachgewiesen werden, als oben der Fall war. Es sei $f(t, t', t'')$ eine homogene Function dritten Grades, welche durch die linearen Substitutionen

$$t = \lambda x + \mu y + \nu z, \quad t' = \lambda' x + \mu' y + \nu' z, \quad t'' = \lambda'' x + \mu'' y + \nu'' z$$

in $f(x, y, z) = ax^3 + \text{etc.}$ übergeht. Dann wird

$$p = \lambda u + \lambda' u' + \lambda'' u'', \quad q = \mu u + \mu' u' + \mu'' u'', \quad r = \nu u + \nu' u' + \nu'' u''.$$

Die erste Gleichung $f_1(xx') = 0$ des alten Systemes (c) ergibt sich aus den drei ersten des neuen, indem man sie mit $\lambda, \lambda', \lambda''$ multiplicirt und addirt, ähnlich die übrigen zwei. Die zwei letzten Gleichungen bleiben in beiden Systemen dieselben. Hat nun $\phi(u, u', u'')$ dieselbe Form im neuen System wie $\Psi(p, q, r)$ im alten, so folgt aus dem Stattfinden der Gleichung $\Psi = 0$ entweder, dass alle fünf Gleichungen des neuen Systemes stattfinden und daher $\phi = 0$ ist, oder dass nur die zwei letzten stattfinden und die Determinante Λ der Substitutions-Coëfficienten verschwindet. Da nun Ψ in Beziehung auf u, u', u'' und die Elemente des Polynoms f vom gleichen Grade ist wie ϕ , hingegen in Beziehung auf $\lambda, \mu, \dots$ vom zwölften Grade, so ist

$$\Psi = \Lambda^3 \phi.$$

Man wird sich dann auch leicht überzeugen, dass

$$\Psi(p, q, r) = \Lambda^2 \phi(lp + mq + nr, l'p + m'q + n'r, l''p + m''q + n''r)$$

ist, wo $l = \frac{d\Lambda}{d\lambda}$, etc. Wenn man daher

$$\Psi(p, q, r) = \Sigma \{ \alpha, \beta, \gamma \} p^\alpha q^\beta r^\gamma, \quad [\alpha + \beta + \gamma = 3]$$

und

$$\begin{aligned} D &= \mu \frac{d}{d\lambda} + \mu' \frac{d}{d\lambda'} + \mu'' \frac{d}{d\lambda''} = 3d \frac{d}{da} + 2g \frac{d}{dd} + 2k \frac{d}{de} + b \frac{d}{dg} + f \frac{d}{dk} + i \frac{d}{dh} \\ &= - \left(l \frac{d}{dm} + l' \frac{d}{dm'} + l'' \frac{d}{dm''} \right) \end{aligned}$$

setzt, so ist

$$D\{\alpha, \beta, \gamma\} = -(\alpha+1)\{\alpha+1, \beta-1, \gamma\}$$

das Gesetz, nach welchem die Coëfficienten von Ψ aus einander hervorgehen. Diese geben sich dadurch, wie wir unten zeigen werden, als Differential-Coëfficienten einer Superdeterminante zu erkennen.

Bedeutet nun (α, β, γ) eine Grösse, für welche

$$D(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha \cdot (\alpha-1, \beta+1, \gamma)$$

ist, so wird

$$D \cdot (\alpha, \beta, \gamma) \{\alpha, \beta, \gamma\} = \alpha (\alpha-1, \beta+1, \gamma) \{\alpha, \beta, \gamma\} - (\alpha+1) (\alpha, \beta, \gamma) \{\alpha+1, \beta-1, \gamma\},$$

und wenn man diese Gleichung in Beziehung auf alle Variationen $\alpha \beta \gamma$ zur Summe $\alpha+\beta+\gamma=3$ summirt,

$$D \cdot \Sigma (\alpha, \beta, \gamma) \{\alpha, \beta, \gamma\} = 0.$$

Nun haben die Elemente der beiden Polynome f und φ die von den Grössen (α, β, γ) verlangte Eigenschaft. Also sind die Functionen

$$\frac{1}{6} f \left(\frac{d}{dp}, \frac{d}{dq}, \frac{d}{dr} \right) \Psi(p, q, r) = 4A,$$

$$\varphi \left(\frac{d}{dp}, \frac{d}{dq}, \frac{d}{dr} \right) \Psi(p, q, r) = B$$

Superdeterminanten der ursprünglichen Elemente, jene vom vierten, diese vom sechsten Grade.

§. 3. Da die Summe der Zeiger jedes ursprünglichen Elementes 3 ist, so ist für eine Superdeterminante m ten Grades die Summe der auf alle drei Variablen x, y, z bezüglichen Zeiger gleich $3m$, folglich die Summe der auf eine einzige Variable bezüglichen Zeiger gleich m . Man bilde nun alle symmetrischen Functionen m ten Grades der ursprünglichen Elemente, für welche die Summe aller gleichnamigen Zeiger gleich m ist, versehe dieselben mit unbestimmten Factoren und vollziehe an dem so erhaltenen Aggregat die Operation D . Dann liefert die Bedingung $D=0$ eine Menge linearer Gleichungen zwischen jenen unbestimmten Factoren. Widersprechen sich diese Gleichungen, so gibt es keine Superdeterminante m ten Grades; hängen sie zum Theil von einander ab und reichen, auf ihre wesentliche Anzahl reducirt, gerade hin zur Bestimmung der Verhältnisse jener unbekannten Factoren, so gibt es nur eine Superdeterminante m ten Grades; werden endlich jene Factoren nicht in ihrer Gesamtheit, sondern nur gruppenweise durch die gefundenen Verhältnisse verkettet, so gibt es mehrere Superdeterminanten m ten Grades. Beim vierten und sechsten Grade kommen resp. 9 und 28 symmetrische Functionen in Betracht, und die Rechnung zeigt, dass es für jeden dieser Grade nur eine Superdeterminante gibt, für den ersten, zweiten, dritten und fünften Grad hingegen gar keine. Man findet

$$A = -abck + \sum_3 abhi - \sum_6 agi^2 + \sum_3 afik + \sum_3 g^2 h^2 - \sum_3 id ef \\ + 3 \sum_2 dfhk - 2 \sum_3 ghk^2 + k^4,$$

$$B = -a^2 b^2 c^2 + 6 \sum_3 a^2 b c f i - 4 \sum_6 a^2 b i^3 + 3 \sum_3 a^2 f^2 i^2 - 6 \sum_2 abcd f h - 12 \sum_3 ab c g h k \\ - 18 \sum_3 b c g h d e + 12 \sum_6 b c d^2 e i + 24 \sum_6 b c g e^2 k + 12 \sum_6 b e^3 f i - 6 \sum_6 a f i^2 e g \\ - 12 \sum_6 a f i^2 d k + 20 a b c k^3 - 36 \sum_3 b c d e k^2 - 24 \sum_6 a h g^2 i^2 + 60 \sum_3 a g h f i k - 12 \sum_6 a g i^2 k^2 \\ + 12 \sum_3 a f i k^3 - 8 \sum_3 g^3 h^3 + 12 \sum_6 i d g^2 h^2 + 27 \sum_2 d^2 f^2 h^2 + 6 d f h e g i - 36 \sum_6 f i g e^2 k + 24 \sum_3 g^2 h^2 k^2 \\ + 12 \sum_3 i d e f k^2 + 36 \sum_2 d f h k^3 - 24 \sum_3 g h k^4 + 8 k^6,$$

wo die den Summenzeichen Σ untergesetzten Zahlzeichen die Anzahl der Glieder einer jeden Summe bezeichnen.

Da wir oben die bei der Bestimmung der Wendungspunkte einer Curve dritten Grades vorkommenden Functionen α und β resp. vierten und sechsten Grades ebenfalls als Superdeterminanten kennen gelernt haben, und da es für jeden dieser Grade nur eine Superdeterminante gibt, so können α und β von A und B höchstens nur durch numerische Factoren sich unterscheiden. Man findet leicht $A = -\alpha$, $B = -\beta$, so dass wir jetzt haben

$$\Psi(f_1, f_2, f_3) = Af^2 - \varphi^2, \frac{1}{2} \nabla \varphi = 4A^2 f - B\varphi, R = B^2 - 64A^3,$$

wo R die Resultante der Polynome f_1, f_2, f_3 bezeichnet. In Aronhold's Abhandlung (Crelle XXXIX, S. 152) sind die Superdeterminanten A und B resp. mit $\frac{1}{4}S$ und T bezeichnet.

§. 4. Es wurde oben gesagt, dass die Coëfficienten von Ψ sich als Differential-Coëfficienten einer Superdeterminante zu erkennen geben. Dies beruht auf folgendem allgemeinen Satze.

Wenn S eine Superdeterminante der Elemente der Function n ten Grades

$$f(x, y, z, \dots) = \Sigma \frac{n!}{\alpha! \beta! \gamma! \dots} (\alpha, \beta, \gamma, \dots) x^\alpha y^\beta z^\gamma \dots, [\alpha + \beta + \dots = n]$$

und D die ableitende Operation, wodurch $D(\alpha, \beta, \gamma, \dots) = \alpha(\alpha-1, \beta+1, \gamma, \dots)$ wird, bezeichnet, und man setzt

$$\frac{1}{i!} \left(\Sigma p^\alpha q^\beta r^\gamma \dots \frac{d}{d(\alpha, \beta, \gamma, \dots)} \right)^i S = \Sigma \{\varepsilon, \eta, \theta, \dots\} p^\varepsilon q^\eta r^\theta \dots, [\varepsilon + \eta + \dots = in],$$

so ist

$$D\{\varepsilon, \eta, \theta, \dots\} = -(\varepsilon+1) \cdot \{\varepsilon+1, \eta-1, \theta, \dots\}.$$

Beweis. Setzt man abkürzend $(\alpha, \beta, \gamma, \dots) = a$, $(\alpha+1, \beta-1, \gamma, \dots) = b$, $(\alpha', \beta', \gamma', \dots) = a'$, $(\alpha'+1, \beta'-1, \gamma', \dots) = b'$, etc., und differentiirt die identische Gleichung

$$DS = \Sigma_{\lambda+\mu+\dots=n} \lambda \cdot (\lambda-1, \mu+1, \nu, \dots) \frac{dS}{d(\lambda, \mu, \nu, \dots)} = 0$$

i mal hinter einander nach den i Elementen $a, a', a'', \dots$, so erhält man

$$D \frac{d^i S}{da da' da'' \dots} = -(\alpha+1) \frac{d^i S}{db da' da'' \dots} - (\alpha'+1) \frac{d^i S}{da db' da'' \dots} - \text{etc.}$$

Der Fall, wo mehrere Elemente $a, a', a'', \dots$ gleich sind, macht keine Ausnahme; man wird dann rechts eben so viele gleiche Glieder haben. — Man summire diese Gleichung $(i-1)(k-1)$ mal nach allen Werthen der $k-1$ ersten Zeiger (die Zahl der Variablen $x, y, z, \dots$ gleich k angenommen) eines jeden der $i-1$ ersten Elemente $a, a', \dots$, so weit es die Bedingungen $\alpha + \alpha' + \alpha'' + \dots = \varepsilon$, $\beta + \beta' + \beta'' + \dots = \eta$, $\gamma + \gamma' + \gamma'' + \dots = \theta$, etc. gestatten, so werden rechts die i einzelnen Summen zusammenfallen, weil sie alle zum nämlichen Schema $\varepsilon+1, \eta-1, \theta, \dots$ gehören. Da nun

$$\Sigma \Sigma \dots \frac{d^i S}{da da' da'' \dots} = i! \{\varepsilon, \eta, \theta, \dots\}$$

$\left(\begin{smallmatrix} \alpha + \alpha' + \dots = \varepsilon \\ \beta + \beta' + \dots = \eta \\ \gamma + \gamma' + \dots = \theta \\ \dots \end{smallmatrix} \right)$

ist, so hat man

$$i! D\{\varepsilon, \eta, \theta, \dots\} = -i \Sigma \Sigma \dots (\alpha+1) \frac{d^i S}{da da' da'' \dots} = -i \Sigma \Sigma \dots \left(\begin{smallmatrix} \alpha + \alpha' + \dots = \varepsilon+1 \\ \beta + \beta' + \dots = \eta-1 \\ \gamma + \gamma' + \dots = \theta \\ \dots \end{smallmatrix} \right) \alpha \frac{d^i S}{da da' da'' \dots}.$$

Da aber in der letzten Summe alle Permutationen der Elemente $a, a', a'', \dots$ zugleich vorkommen, so ändert sie sich nicht, wenn man sie auch unter der Form

$$\Sigma \Sigma \dots \alpha' \frac{d' S}{d a d a' d a'' \dots}$$

schreibt. Sie kann also im Ganzen unter i verschiedenen Formen geschrieben werden, und wenn man alle diese Formen addirt, so erhält man auch das i fache der fraglichen Summe. Da nun $\alpha + \alpha' + \alpha'' + \dots = \varepsilon + 1$ ist, so ergibt sich zuletzt, mit Weglassung des Factors $i!$,

$$D\{\varepsilon, \eta, \theta, \dots\} = -(\varepsilon + 1)\{\varepsilon + 1, \eta - 1, \theta, \dots\}.$$

§. 4. Um allgemeine Formeln ausdrücken zu können, wollen wir im Folgenden den Elementen des ursprünglichen Polynoms f bald die Exponenten der Variablen x, y, z zu Zeigern geben, bald nach Cayley's und Hesse's Beispiel sie durch Combinationen von willkürlichen Ziffern bezeichnen, welche den einzelnen Variablen entsprechen. Im ersten Falle setzen wir

$$f = \Sigma \frac{3!}{\alpha! \beta! \gamma!} (\alpha, \beta, \gamma) x^\alpha y^\beta z^\gamma, [\alpha + \beta + \gamma = 3],$$

im zweiten

$$f = \Sigma \Sigma \Sigma (\alpha \beta \gamma) x_\alpha x_\beta x_\gamma,$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 1, 2, 3$$

indem x, y, z durch x_1, x_2, x_3 ersetzt werden.

I. Für $i = 1$, $S = A$ gibt der Satz des vorigen Paragraphs

$$D \frac{dA}{d(\alpha, \beta, \gamma)} = -(\alpha + 1) \frac{dA}{d(\alpha + 1, \beta - 1, \gamma)}.$$

Diese ersten Differential-Coëfficienten von A befolgen also dasselbe Gesetz wie die Coëfficienten von Ψ und sind mit ihnen vom gleichen Grade, dem dritten. Jene werden also mit diesen zusammenfallen, sobald nur einer von jenen mit dem gleichnamigen von diesen zusammenfällt. Nun ist

$$\Psi = |(22i) \cdot (23i) \cdot (33i)| p^3 + \text{etc.},$$

und eine der sechs Formen, unter denen Aronhold die Function A dargestellt hat, ist

$$A = - \left| \begin{array}{ccc} (111) \cdot (112) \cdot (113) \\ (33i) \cdot (21i) \cdot (22i) \cdot (23i) \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc} (131) \cdot (132) \cdot (133) \\ (13i) \cdot (21i) \cdot (22i) \cdot (23i) \end{array} \right|,$$

wo die die Ziffer i enthaltende Zeile drei Zeilen für $i = 1, 2, 3$ repräsentirt. Da nun das Element (111) an einer einzigen Stelle vorkommt, so ergibt sich leicht

$$\frac{dA}{da} = \frac{dA}{d(111)} = |(22i) \cdot (23i) \cdot (33i)|.$$

Also ist

$$\Psi = \Sigma \frac{dA}{d(\alpha, \beta, \gamma)} p^\alpha q^\beta r^\gamma,$$

oder, wenn man

$$dA = \Sigma \Sigma \Sigma h_{\alpha\beta\gamma} d(\alpha\beta\gamma)$$

setzt und p_1, p_2, p_3 anstatt p, q, r schreibt,

$$\Psi = \Sigma \Sigma \Sigma h_{\alpha\beta\gamma} p_\alpha p_\beta p_\gamma.$$

Wenn also

$$6\varphi = \Sigma \Sigma \Sigma [\alpha\beta\gamma] x_\alpha x_\beta x_\gamma$$

(Schläfli.)

k

gesetzt wird, so ist

$$B = \Sigma \Sigma \Sigma h_{\alpha \beta \gamma} [\alpha \beta \gamma],$$

oder auch, wenn δ die ableitende Operation bezeichnet, wo die Differentiale der Elemente von f in die entsprechenden Elemente des Polynoms $6\varphi = \frac{1}{36} \nabla f$ umgesetzt werden,

$$B = \delta A.$$

II. Für $i = 2$, $S = B$ lehrt der obige allgemeine Satz, dass die Coefficienten des Polynoms

$$\frac{1}{2} \left(\Sigma p^\alpha q^\beta r^\gamma \frac{d}{d(\alpha, \beta, \gamma)} \right)^2 B, [\alpha + \beta + \gamma = 3]$$

nach demselben Gesetz aus einander hervorgehen, wie diejenigen des Polynoms $F(p, q, r)$ der Classengleichung der ursprünglichen Curve, mit welchem jenes in Beziehung sowohl auf die ursprünglichen Elemente, als auch auf die Variablen p, q, r dem Grade nach übereinstimmt. Wenn also in beiden Polynomen z. B. die Coefficienten von p^6 zusammenfallen, so sind die Polynome identisch. Nun ist

$$\{6, 0, 0\} = \frac{1}{2} \frac{d^2 B}{d(3, 0, 0)^2} = \frac{1}{2} \frac{d^2 B}{d(111)^2} = \Sigma \frac{d^2 A}{d(111) d(\alpha \beta \gamma)} \frac{d[\alpha \beta \gamma]}{d(111)},$$

weil weder in A , noch in $[\alpha \beta \gamma]$ das Element (111) potencirt vorkommt. Die Summe erstreckt sich auf die zehn Combinationen $(\alpha \beta \gamma)$ der Ziffern 1, 2, 3. Nun ist

$$\frac{dA}{d(111)} = \frac{(221) \cdot (231) \cdot (331)}{(222) \cdot (232) \cdot (332)} \cdot \frac{(223) \cdot (233) \cdot (333)}{(222) \cdot (232) \cdot (332)},$$

$$\frac{d\varphi}{d(111)} = x_1 \begin{vmatrix} f_{22} & f_{23} \\ f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} gx + by + fz & kx + fy + iz \\ kx + fy + iz & hx + iy + cz \end{vmatrix},$$

also

$$\frac{d[221]}{d[111]} = 2(bi - f^2), \quad \frac{d[231]}{d(111)} = bc - fi, \quad \frac{d[331]}{d(111)} = 2(cf - i^2).$$

Die anderen im Ausdrücke für $\{6, 0, 0\}$ vorkommenden Elemente von 6φ , welche nicht in der Form $[1 \alpha \beta]$ begriffen sind, enthalten das Element (111) nicht. Also ist

$$\begin{aligned} \{6, 0, 0\} &= \begin{vmatrix} 2(bi - f^2) & bc - fi & 2(cf - i^2) \\ b & f & i \\ f & i & c \end{vmatrix} \\ &= 4(bi - f^2)(cf - i^2) - (bc - fi)^2. \end{aligned}$$

Wenn wir jetzt im obigen Ausdrücke (b) für F die Variablen q, r gleich Null setzen, so erhalten wir

$$F = p^2 \begin{vmatrix} V_{22} & V_{23} \\ V_{32} & V_{33} \end{vmatrix}, \quad V = p^2 \begin{vmatrix} f_{22} & f_{23} \\ f_{32} & f_{33} \end{vmatrix},$$

also

$$V_{22} = 2(bi - f^2)p^4, \quad V_{23} = (bc - fi)p^4, \quad V_{33} = 2(cf - i^2)p^4,$$

und hieraus

$$F = \{4(bi - f^2)(cf - i^2) - (bc - fi)^2\} p^6 = \{6, 0, 0\} p^6.$$

Da somit die Coefficienten von p^6 in beiden Polynomen übereinstimmen, so haben wir

$$F(p, q, r) = \frac{1}{2} \left(\Sigma p^\alpha q^\beta r^\gamma \frac{d}{d(\alpha, \beta, \gamma)} \right)^2 B.$$

Diese merkwürdige Form dürfte wohl die kürzeste sein, unter der sich das Polynom der Classengleichung der Curve dritten Grades überhaupt darstellen lässt.











Schläfli, Ludwig,

Über die Resultante eines Systemes mehrerer algebraischer Gleichungen Ein
Beitrag zur Theorie der Elimination. (A. d. IV Bd. der Denkschriften der
math.-naturw. Classe der kais. Acad. d. Wiss. bes. abgedruckt)

Wien 1852

2 Math.p. 56 m

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10942369-2